

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À
L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

COMME EXIGENCE PARTIELLE
À L'OBTENTION DE LA MAÎRISE EN TECHNOLOGIE DES SYSTÈMES

PAR
MOHAND SALAH MADI

ESTIMATION DES PARAMÈTRES DU MODÈLE DE FROTTEMENT DE LUGRE
PAR L'ANALYSE D'INTERVALLE

MONTREAL, LE 10 SEPTEMBRE 2004

© droits réservés de Mohand Salah Madi

CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ
PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

M. Pascal Bigras, directeur de mémoire

Département de génie de production automatisée à l'École de technologie supérieure

M. Tony Wong, président du jury

Département de génie de production automatisée à l'École de technologie supérieure

M. Guy Gauthier, examinateur

Département de génie de production automatisée à l'École de technologie supérieure

IL A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC

MOMTRÉAL, LE 10 SEPTEMBRE 2004

À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

ESTIMATION DES PARAMÈTRES DU MODÈLE DE FROTTEMENT DE LUGRE PAR L'ANALYSE D'INTERVALLE

Mohand Salah Madi

Sommaire

Une mauvaise connaissance a priori des paramètres des modèles de frottement rend difficile la conception des contrôleurs de position, spécialement dans les servomécanismes de haute précision. Les approches habituellement utilisées pour l'identification de systèmes, telle que la méthode des moindres carrés, peuvent être inefficaces pour identifier le modèle de frottement de LuGre puisque qu'il ne peut être représenté sous une forme linéaire par rapport à ses paramètres incertains.

L'approche à erreur bornée est efficace pour estimer des paramètres incertains de modèles fortement non linéaire. Cette approche est basée sur l'analyse d'intervalle et l'inversion ensembliste. Elle a été récemment utilisée avec succès dans plusieurs domaines notamment en électrochimie, en contrôle et en traitement des signaux. L'objectif de ce mémoire est d'appliquer cette approche au problème d'estimation des paramètres du modèle de frottement de LuGre. Pour valider la méthodologie présentée, des données expérimentales récoltées à partir d'un système électropneumatique sont utilisées pour identifier les paramètres du modèle.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma très vive reconnaissance envers mon directeur de mémoire M. Pascal Bigras pour l'aide qu'il m'a apporté tout au long de ce travail. Son intérêt et ses précieux conseils m'ont été d'un grand profit.

Que les membres de jury qui me feront honneur de juger ce travail trouvent ici mes sincères remerciements.

Je tiens également à remercier Karim Khayati pour ses encouragements et ses conseils.

TABLE DES MATIÈRES

	Page
SOMMAIRE.....	i
REMERCIEMENTS	ii
TABLE DES MATIÈRES	iii
LISTE DES TABLEAUX.....	v
LISTE DES FIGURES.....	vi
LISTE DES ABRÉVIATIONS ET DES SIGLES.....	iiix
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 REVUE DE LITTÉRATURE.....	4
1.1 Introduction	4
1.2 Frottement	4
1.3 Identification	5
CHAPITRE 2 MODÉLISATION DU FROTTEMENT	7
2.1 Introduction	7
2.2 Modèles de Frottement.....	7
2.2.1 Modèles statiques	8
2.2.2 Modèles dynamiques de frottement	12
2.3 Conclusion	24
CHAPITRE 3 ANALYSE D'INTERVALLE	25
3.1 Introduction	25
3.2 Opérateurs ensemblistes.....	25
3.2.1 Opérations ensemblistes pures	26
3.2.2 Opérations étendues	26
3.3 Enveloppes	30
3.4 Analyse d'intervalle	33
3.4.1 Intervalle	33
3.4.2 Arithmétique d'intervalle	34
3.4.3 Pavé	36
3.4.4 Fonction d'inclusion	37
3.4.5 Bissection	41
3.4.6 Sous-pavage	44
3.4.7 Test d'inclusion	45
3.4.8 Inversion ensembliste.....	45

3.5	Conclusion	50
CHAPITRE 4	IDENTIFICATION	52
4.1	Introduction	52
4.2	Principe de l'identification	52
4.2.1	Étape a priori	53
4.2.2	Étape a posteriori.....	53
4.3	Estimation paramétrique classique.....	55
4.4	Estimation à erreurs bornées	56
4.5	Encadrement de la solution d'une équation différentielle.....	57
4.5.1	Estimation paramétrique pour des modèles sous forme d' EDO	57
4.6	Conclusion	62
CHAPITRE 5	ESTIMATION DES PARAMÈTRES DU MODÈLE DE FROTTEMENT	64
5.1	Introduction	64
5.2	Description du système électropneumatique.....	64
5.3	Modélisation de la partie mécanique.....	65
5.3.1	Fonction multilinéaire	68
5.4	Stratégie d'identification	68
5.4.1	Identification des paramètres statiques	70
5.4.2	Estimation en préglissement	70
5.4.3	Estimation en glissement.....	75
5.5	Conclusion et interprétation des résultats.....	79
CONCLUSION GÉNÉRALE.....		81
Annexes :		
1 :	Propriétés sur les fonctions ensemblistes	83
2 :	Encadrement de la solution d'une édo	87
BIBLIOGRAPHIE		91

LISTE DES TABLEAUX

	Page
Tableau I Estimés des paramètres dynamiques obtenues en préglissement	74
Tableau II Estimés des paramètres σ_1 et σ_2 obtenues en glissement	77
Tableau III Intervalle de variation des paramètres dans l'approximation intérieure $\underline{\mathbb{S}}$	78

LISTE DES FIGURES

	Page
Figure 1	Modèle statique de frottement8
Figure 2	Composantes du frottement11
Figure 3	Caractéristique frottement-vitesse du modèle de Karnopp12
Figure 4	Force de frottement en fonction de la position pour le modèle de Dahl.....14
Figure 5	Force de frottement en fonction du déplacement relative absolue du modèle de Bliman et Sorine..... 16
Figure 6	Modélisation ressort –amortisseur du modèle LuGre (vue microscopique du frottement entre deux surfaces en contact)18
Figure 7	Force extérieure appliquée (95% de la force statique) 19
Figure 8	Simulation du mouvement de préglissement avec le modèle de LuGre..... 20
Figure 9	Hystérésis 21
Figure 10	Force de décrochage en fonction du taux de variation de la force extérieure.....22
Figure 11	Masse–ressort pour la simulation du mouvement adhérence –glissement.....22
Figure 12	Simulation du mouvement adhérence–glissement..... 23
Figure 13	Ensemble image \mathbb{Y} et enveloppe \mathcal{Y} de l'ensemble \mathbb{X} 33
Figure 14	Pavé $[X]$ de dimension 2 37
Figure 15	Image du pavé $[X]$ par la fonction f et les fonctions d'inclusion $[f_1]$ et $[f_2]$.38
Figure 16	Bissection du pavé $[X]$ 42
Figure 17	Évaluation de l'image d'une fonction par bissection 43
Figure 18	Encadrement de l'ensemble solution par deux sous-pavages 46
Figure 19	Différentes possibilités d'acceptabilité et d'inacceptabilité d'un pavé 48
Figure 20	Ensemble solution par l'approximation intérieure (noir) et l'approximation extérieure (gris) 50
Figure 21	Principe de l'identification 54
Figure 22	Représentation de l'erreur entre le système et le modèle 55

Figure 23	Erreur centrale de 5% sur la sortie mesurée	61
Figure 24	Ensemble des paramètres cohérent avec les états prédits et les mesures	62
Figure 25	Dispositif expérimental: système électropneumatique	65
Figure 26	Modélisation du déplacement du piston	66
Figure 27	Force appliquée sur le piston du système pneumatique	70
Figure 28	Vitesses avec le modèle simplifié vs non simplifié du modèle de LuGre	72
Figure 29	Force de frottement et son incertitude	72
Figure 30	Approximation intérieure ($\underline{\mathbb{S}}$ en gris) et extérieure ($\bar{\mathbb{S}}$ en noir) de l'ensemble des paramètres estimés pour σ_0 et $\sigma_1 + \sigma_2$ dans l'espace de recherche initial $[\mathbf{P}] = [1 \times 10^3 \ 2 \times 10^6] \times [1 \times 10^3 \ 2 \times 10^6] \times [-1 \times 10^{-4} \ 1 \times 10^{-4}] \ \varepsilon = 0.0005 \dots$	73
Figure 31	Encadrement intérieur et extérieur de l'ensemble solution obtenus dans l'espace de recherche initial $[\mathbf{P}] = [1 \times 10^3 \ 2 \times 10^6] \times [1 \times 10^3 \ 2 \times 10^6] \times [-1 \times 10^{-4} \ 1 \times 10^{-4}] \ \varepsilon = 0.0005 \dots$	74
Figure 32	La force de frottement expérimentale et son incertitude	76
Figure 33	Encadrement intérieur($\underline{\mathbb{S}}$ en blanc) et extérieur ($\bar{\mathbb{S}}$ en noir) de l'ensemble solution obtenus pour l'ensemble des paramètres σ_1 et σ_2 dans l'espace de recherche initial $[\mathbf{P}] = [0 \ 4.5 \times 10^3] \times [0 \ 2 \times 10^3] \ \varepsilon = 0.0005 \dots$	77
Figure 34	Projection de l'approximation intérieure $\underline{\mathbb{S}}$ dans l'espace des paramètres $p = [\sigma_1; \sigma_2]$	79

LISTE DES ABRÉVIATIONS ET DES SIGLES

m	Masse, kg
F_f	Force de frottement, N
F_n	Force normale appliquée sur la masse m , N
F_e	Force appliquée sur la masse m , N
F_c	Coefficient de frottement de Coulomb, N
F_s	Coefficient de frottement statique, N
F_v	Coefficient de frottement visqueux pour les modèles statiques, Ns/m
v	Vitesse, m/s
sgn	Fonction signe
l	Déplacement relatif absolu des corps en contact, m
f_1, f_2	Gains statiques pour le modèle de Bliman et Sorine, Nm
Y	Transformé de Laplace de la force de frottement
U	Transformée de Laplace du signe de la vitesse
A, B, C	Matrices d'état du modèle de Bliman et Sorine
ε_f	Distance liée au mouvement de préglissement, m
z	Position à l'échelle microscopique, m
σ_0	Coefficient de rigidité (raideur), N/m
σ_1	Coefficient d'amortissement, Ns/m
σ_2	Coefficient du frottement visqueux pour les modèles dynamiques, Ns/m
v_s	Vitesse de Stribeck, m/s
$\alpha(v)$	Fonction de Stribeck
F_{ss}	Force de frottement en régime stationnaire, N
\mathbb{R}	Ensemble des réels
\mathbb{X}, \mathbb{Y}	Sous-ensembles de \mathbb{R}

\mathcal{X}	Enveloppe ou récipient
$\mathbb{I}\mathcal{X}$	Ensemble des enveloppes ou récipients
\mathbb{IR}	Ensemble de tous les intervalles de \mathbb{R}
$[X]$	Intervalle sur \mathbb{R}
\underline{X}	Borne inférieure de l'intervalle $[X]$
\bar{X}	Borne supérieure de l'intervalle $[X]$
$w([X])$	Largeur de l'intervalle $[X]$
$Mid([X])$	Milieu de l'intervalle $[X]$
$r([X])$	Rayon de l'intervalle $[X]$
$[X]$	Vecteur d'intervalle ou pavé
\mathbb{IR}^n	Ensemble de tous les pavés
$[f]$	Fonction d'inclusion de f
$[f]^*$	Fonction d'inclusion minimale de f
e	Erreur de Sortie
y_m	Vecteur de la sortie mesurée
y	Vecteur de la sortie du modèle
\mathbb{S}	Ensemble des solutions du problème d'estimation des paramètres

INTRODUCTION

Le frottement mécanique est un aspect important dans la commande des systèmes industriels, notamment dans les servomécanismes de haute précision, dans les actionneurs pneumatiques, hydrauliques, ainsi que dans les valves. Ce phénomène physique complexe entraîne souvent des erreurs de positions en régime permanent. La modélisation du frottement a retenu l'attention d'un bon nombre de chercheurs depuis plusieurs années. Dans la dernière décennie, plusieurs modèles dynamiques [1-3] ont été développés pour mieux décrire le phénomène du frottement. À cause des incertitudes paramétriques de ces modèles, et de par leurs caractéristiques non linéaires, il est primordial d'effectuer une identification rigoureuse de ces paramètres qui tiendra compte de ces particularités afin de construire des contrôleurs plus précis et plus robustes.

Le modèle de frottement de LuGre [2], récemment développé par le laboratoire d'automatique de Grenoble en France et l'institut de technologie de Lund en Suède est un modèle dynamique non linéaire à paramètres incertains. Ce modèle, qui a été retenu pour l'étude présentée dans ce mémoire, représente autant les aspects macroscopiques que microscopiques du frottement. Une justification plus étoffée de ce choix est présentée dans le chapitre consacré à la modélisation du frottement.

Les méthodes classiques, dite ponctuelles, d'identification des paramètres sont généralement basées sur les méthodes des moindres carrées. Celles-ci peuvent être vues comme des problèmes d'optimisation qui se résolvent avec des techniques locales telles que les méthodes de Gauss Newton, de quasi-Newton ainsi que celle du gradient conjugué [4]. Ces approches n'offrent aucune garantie sur la qualité de l'estimation, pas plus que sur la confiance qu'on peut accorder à la solution obtenue.

Par ailleurs; il existe des techniques d'optimisation globales tels que les algorithmes génétiques [4], [28] où l'exploration aléatoire de l'espace de recherche contourne le problème du choix de la valeur initiale rencontré par les méthodes locales. Malgré une exploration plus exhaustive de l'espace des solutions, ces nouvelles méthodes ne garantissent pas toujours la convergence vers l'optimum global dans un nombre fini d'itérations.

Une approche alternative d'estimation des paramètres, basée sur l'analyse d'intervalle et l'inversion ensembliste, dite estimation de paramètres à erreurs bornés (Bounded –error estimation), a fait ses preuves dans plusieurs domaines notamment en électrochimie [4], en commande et en traitement des signaux [5]. Cette approche permet de cerner non pas un point (un estimé des paramètres), mais plutôt un ensemble des tous les paramètres qui sont jugés acceptables et compatibles avec les données mesurés et leurs incertitudes.

Ce mémoire présente l'application de cette méthode au problème d'identification du modèle de frottement de LuGre dans un actionneur électropneumatique.

Le reste du mémoire est organisé comme suit :

Le premier chapitre est consacré à la revue bibliographique où le phénomène de frottement est décrit depuis ses premières découvertes jusqu'à nos jours. Ce chapitre est également consacré à la revue bibliographique des méthodes les plus utilisées pour identifier le modèle de frottement de LuGre.

Les modèles de frottement statique et dynamique les plus couramment cités ainsi que les phénomènes qui peuvent en découler sont présentés dans le deuxième chapitre.

Le troisième chapitre fait l'objet de l'analyse par intervalle où les notions de bases qui y sont rattachées sont présentées. Le principe et l'algorithme d'inversion ensembliste basé

sur l'analyse par intervalle y sont décrits. Un exemple pour expliquer ce principe est également donné à la fin du chapitre.

Dans le quatrième chapitre, le principe de l'identification classique est rappelé. Ensuite, l'approche de l'estimation à erreurs bornées est présentée en détail. Une adaptation de cet algorithme pour l'estimation des paramètres de systèmes qui sont régis par des équations différentielles ordinaires est ensuite proposée. Un exemple d'application complète finalement le chapitre.

Le cinquième chapitre concerne l'application des techniques d'estimation des paramètres par analyse d'intervalle sur un banc d'essai d'un actionneur électropneumatique. Les données expérimentales collectées servent pour l'estimation des paramètres du modèle de LuGre. La procédure d'identification et les résultats obtenus y sont présentés.

CHAPITRE 1

REVUE DE LITTERATURE

1.1 Introduction

Ce chapitre se divise en deux parties essentielles. La première concerne un survol des investigations qui ont été effectuées sur le phénomène du frottement jusqu'à aujourd'hui. Quant à la deuxième partie, elle sera consacrée aux travaux entamés sur l'identification du modèle de frottement de LuGre.

1.2 Frottement

Le frottement est une force tangentielle qui apparaît lorsque deux corps entrent en contact. L'aspect de frottement demeure complexe à cause de la géométrie et la topologie des surfaces de contact, la nature des matériaux, la température, la vitesse relative de déplacement et la présence ou non de lubrifiant sur les surfaces. Ce sont les raisons pour lesquelles la modélisation du frottement demeure un domaine de recherche ouvert jusqu'à maintenant.

Les premières investigations dans ce domaine remontent au début du seizième siècle par Léonard de Vinci, où il formula deux lois sur le frottement. Il constata que la force de frottement est proportionnelle à la charge normale et que le coefficient de frottement est indépendant des caractéristiques de la surface de contact. Ces lois ont été redécouvertes par Amontons et développées par Coulomb deux siècles plus tard. Ce modèle est connu sous le nom de *frottement de Coulomb*.

Il existe une force de frottement qui est plus importante que la force de Coulomb. Cette force doit être vaincue avant que le mouvement se soit initié; c'est le *frottement statique* [6],[7].

Le frottement de Coulomb est un frottement étudié sur des surfaces en absence de lubrifiants. Plus tard un autre phénomène de frottement a été découvert en présence de lubrifiants entre les surfaces. Ce frottement est appelé *frottement visqueux* [6],[7]

Le passage de la force de frottement statique à celle de Coulomb se fait en réalité de façon graduelle en fonction de la vitesse. Cette transition entre le frottement statique et celui de Coulomb ne peut être décrite par les modèles présentés précédemment lorsque les surfaces en contact sont lubrifiées. Cette transition par une courbe continue de pente de viscosité négative dite courbe de Stribeck, ou appelé communément *effet de Stribeck* [8].

D'autres phénomènes, tels que l'hystérésis entre la force de frottement et la vitesse de déplacement ainsi que l'adhérence (ou préglissement) qui provoque un très faible mouvement aux vitesses proches de zéro, ont été découverts par la suite. Afin de comprendre tous ces phénomènes de nature dynamiques, des chercheurs ont tenté d'établir de nouveaux modèles de frottement. Parmi ces modèles, on retrouve le modèle de Dahl [9], [18] Bliman & Sorine [9] ainsi que le modèle de LuGre [2]. Récemment Swevers [3],[10] a proposé un modèle qui est une amélioration du modèle de LuGre, mais ce dernier reste encore non utilisé en pratique à cause de sa trop grande complexité.

1.3 Identification

Afin de réduire les effets indésirables du frottement, particulièrement dans la commande des systèmes industriels, plusieurs techniques de compensation telle que la compensation adaptative [11], la compensation prédictive du frottement de Coulomb et

la compensation par un gain élevé en boucle fermée [6] ont été utilisées. Ces techniques nécessitent d'abord un modèle de frottement qui reflète de façon précise les effets du frottement dans le système à commander. Pour plusieurs de ces techniques, une estimation des paramètres du modèle est nécessaire. Or, le frottement présent dans les servomécanismes est fortement non linéaire. Il peut varier en fonction du temps et peut dépendre de plusieurs facteurs inconnus tel que la température, l'état des surfaces de contact ainsi que la vitesse relative avec lesquels les corps en contact se déplacent. Les techniques utilisées jusqu'à aujourd'hui pour l'estimation de ces paramètres se basent sur les méthodes des moindres carrés ou des algorithmes d'optimisation non linéaires. Dans son expérience, Altpeter [12] a appliqué ces mêmes techniques pour l'estimation des paramètres de modèle de LuGre en utilisant les propriétés de ce modèle. Malheureusement si ces techniques sont utilisées dans des conditions d'expérience différentes, les résultats obtenus peuvent être différents. De surcroît, il n'existe aucun moyen de garantir la consistance des résultats obtenus. Une autre approche d'identification dans le domaine fréquentiel en régime de préglissement a été proposée par Hensen [13]. Cette technique est basée sur une linéarisation du modèle de LuGre.

Les méthodes proposées jusqu'à maintenant, ne tiennent pas compte de l'incertitude paramétrique. De plus, des approximations doivent être faite pour effectuer l'identification.

À la différence des techniques classiques citées plus haut, la méthode qui est étudiée dans ce mémoire, connue sous le nom d'estimation à erreurs bornées (Bounded-error estimation), est basée sur l'analyse par intervalle [4], [5], [24]. L'estimation obtenue n'est plus un point ou un vecteur ponctuel, mais plutôt un ensemble de tous les paramètres qui sont jugés acceptables et compatibles avec les données et leurs incertitudes.

CHAPITRE 2

MODÉLISATION DU FROTTEMENT

2.1 Introduction

Le frottement est un phénomène complexe qui apparaît entre deux surfaces physiques en contact. Sa modélisation a fait l'objet de recherche depuis plusieurs années et demeure encore de nos jours un domaine ouvert. Le frottement dépend de la géométrie et de la topologie des surfaces de contact, des propriétés des matériaux, de la vitesse relative des corps en mouvement, du déplacement, de la température et de la présence ou non de lubrifiant.

La présence du frottement détériore généralement les performances des systèmes de commande de position des mécanismes. Elle peut entraîner des erreurs statiques de poursuite de trajectoire et des cycles limites. Il est alors important pour les automaticiens de comprendre ce phénomène pour être en mesure de concevoir des contrôleurs plus robustes et précis pour des systèmes tels que les servomécanismes de haute précision, les robots, ainsi que les actionneurs pneumatiques et hydrauliques [17].

2.2 Modèles de Frottement

Dans cette section, nous allons présenter les modèles qui sont les plus souvent cités dans la littérature [2], [6], [8], [9], [17]. Ils diffèrent par le nombre de phénomènes qu'ils décrivent et par leurs complexités.

Les modèles de frottement ont été classés en deux catégories: les modèles statiques et dynamiques.

2.2.1 Modèles statiques

Si on considère le système décrit par la figure 1, le modèle statique est caractérisé par une force de frottement F_f qui est une fonction de la vitesse v et de la force extérieure F_e . De surcroît, la force de frottement est généralement proportionnelle à la force normale F_n . Par conséquent, la majorité des paramètres des modèles présentés dans les paragraphes suivants sont également proportionnels à F_n . Pour simplifier la présentation, cette dépendance ne sera pas spécifiée explicitement.

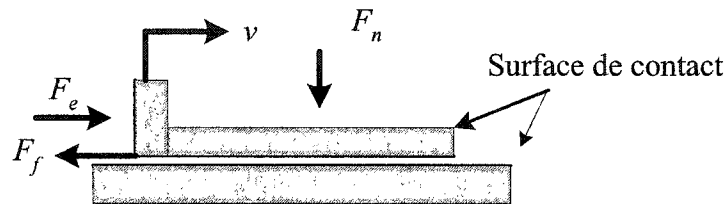


Figure 1 Modèle statique de frottement

Frottement de Coulomb

Le frottement de Coulomb, illustré par la figure 2a en page 11, dépend du signe de la vitesse, il est donné par la fonction suivante :

$$F_f = F_c \operatorname{sgn}(v) \quad (2.1)$$

où F_c est le coefficient de frottement de Coulomb. Notons que le modèle de frottement de Coulomb ne spécifie pas la force de frottement à vitesse nulle. Cette force peut être nulle ou prendre n'importe quelle valeur dans l'intervalle $[-F_c, F_c]$. Notons aussi que le modèle de Coulomb considère que le contact entre les surfaces se fait sans la présence de lubrifiants. Reynolds [6] a introduit un nouveau modèle de frottement quand les surfaces sont lubrifiées. Il s'agit du frottement visqueux.

Frottement visqueux

Le frottement visqueux, illustré par la figure 2b à la page 11, est causé par la présence de lubrifiant entre les surfaces. Il est modélisé par la fonction suivante :

$$F_f(v) = F_v v \quad (2.2)$$

où F_v est appelé coefficient du frottement visqueux. Il est généralement combiné avec les frottements de coulomb et d'adhérence.

Frottement d'adhérence

Ce frottement, illustré par la figure 2c à la page 11, est basé sur des observations expérimentales. Il décrit la force de frottement à vitesse nulle à l'aide de la relation suivante :

$$F_f = \begin{cases} F_e & \text{si } v=0 \text{ et } |F_e| < F_s \\ F_s \operatorname{sgn}(v) & \text{si } v \neq 0 \text{ et } |F_e| > F_s \end{cases} \quad (2.3)$$

où F_s est le coefficient de frottement statique qui caractérise la force de décrochage et F_e est la force externe. Il faut noter que cette force de frottement est généralement plus grande que le frottement de Coulomb.

De façon générale, le frottement peut être modélisé par une combinaison des modèles de Coulomb, visqueux et d'adhérence. La décroissance de la force de frottement de l'état statique à l'état de Coulomb en fonction de la vitesse au voisinage de zéro ne se fait cependant pas de façon discontinue comme le suggère cette combinaison. Le modèle de

Stribeck permet de mieux représenter le frottement en lissant la transition du modèle d'adhérence au modèle de Coulomb.

Frottement de Stribeck

Le modèle de Stribeck [6] qui permet d'assurer la continuité lors du passage du modèle d'adhérence au modèle de Coulomb est donnée par la forme générale suivante (figure 2d) :

$$F_f = \begin{cases} F(v) = F_c + (F_s - F_c) e^{-|v/v_s|^{\delta_s}} + F_v v & \text{si } v \neq 0 \\ F_e & \text{si } v = 0 \text{ et } |F_e| < F_s \\ F_s \text{sgn}(v) & \text{autrement} \end{cases} \quad (2.4)$$

où v_s est la vitesse de Stribeck et le terme $|v_s|^{-\delta_s}$ détermine la rapidité de transition du frottement d'adhérence au frottement de Coulomb

L'application du modèle (2.4) en simulation, ou en commande, nécessite une détection de la vitesse nulle. Karnopp [19] a proposé un modèle pour surmonter ce problème. Ce modèle fait l'objet du paragraphe suivant.

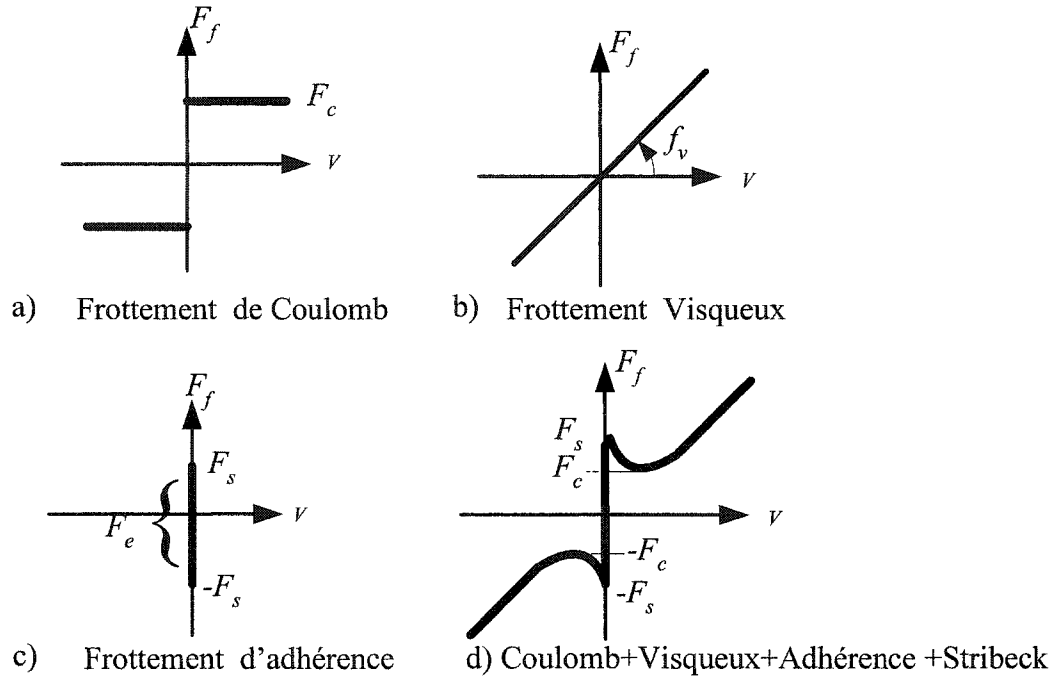


Figure 2 Composantes du frottement statique

Modèle de Karnopp

Karnopp [19] a proposé un modèle pour surmonter le problème de la détection des vitesses nulles. Il a défini un intervalle de faibles vitesses $[-dv \ dv]$ (figure 3). Pour toutes les valeurs de vitesses à l'intérieur de cet intervalle, l'état interne du système peut changer (micro déplacement), mais la sortie du modèle est maintenue à zéro (adhérence). Le modèle peut être décrit de la façon suivante :

$$F_f = \begin{cases} F_c \operatorname{sgn}(v) + F_v v \\ \operatorname{sign}(F_e) \min(|F_e|, F_s) \end{cases} \quad \text{si } \begin{matrix} v \geq dv \\ v \leq -dv \end{matrix} \quad (2.5)$$

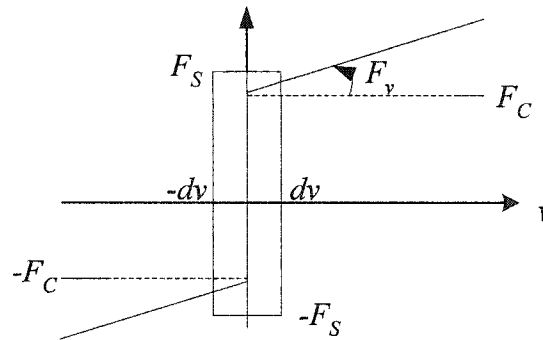


Figure 3 Caractéristique frottement-vitesse du modèle de Karnopp

Les deux inconvénients majeurs de ce modèle sont :

- 1) - Dans l'intervalle des faibles vitesses, le modèle ne reflète pas le frottement réel.
- 2) - Il est fortement couplé au reste du système, notamment à la force externe qui n'est pas donnée explicitement [17].

Les modèles statiques présentés dans cette section ne permettent pas d'expliquer d'autres aspects qui sont dus à la nature non linéaire du frottement, tels que les mouvements de pré glissement en régime statique ou les retards des frottements en régime dynamique (glissement). Avec l'augmentation de la performance des servomécanismes, il devient de plus en plus important de construire des modèles capables de mieux représenter ces phénomènes de frottement de façon à pouvoir les compenser plus adéquatement.

2.2.2 Modèles dynamiques de frottement

Les modèles dynamiques les plus connus sont les modèles de Dahl [18], le modèle de Bliman et Sorine [9] et le modèle de LuGre [2]. Selon la Figure .1, la force de frottement F_f dépend toujours de la vitesse v et de la force externe F_e . Cependant, contrairement au modèle statique, le modèle dynamique est régi par une équation différentielle.

2.2.2.1 Modèle de Dahl

Le modèle de Dahl est essentiellement le modèle de frottement de Coulomb avec une période transitoire dans le changement de la force de frottement lorsque la direction du mouvement change [2]. Il est inspiré de la mécanique classique des solides. Il est caractérisé par une courbe de contrainte-déformation. Lorsque le solide est soumis à des contraintes, la force de frottement augmente progressivement jusqu'à la rupture. Cette courbe est modélisée par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dF_f}{dx} = \sigma_0 \left(1 - \frac{F_f}{F_c} \operatorname{sgn} v \right)^\alpha \quad (2.6)$$

où σ_0 est le coefficient de rigidité et α détermine la forme de la courbe effort-déformation. Comme l'indique l'équation (2.6), le modèle de Dahl ne dépend que du déplacement et du signe de la vitesse (voir figure 4). Le modèle de Dahl dans le domaine temporel peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{dF_f}{dt} = \frac{dF_f}{dx} \frac{dx}{dt} = \sigma_0 \left(1 - \frac{F_f}{F_c} \operatorname{sgn} v \right)^\alpha v. \quad (2.7)$$

Pour $\alpha=1$ et $F_f = \sigma_0 z$, le modèle (2.7) devient :

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= v - \frac{\sigma_0 |v|}{Fc} z \\ F_f &= \sigma_0 z \end{aligned} \quad (2.8)$$

où z est une variable interne, caractérisant le mouvement de préglissement. Le préglissement est un déplacement microscopique dans lequel les surfaces sont liées par une succion élastique.

L'inconvénient de ce modèle est qu'il ne permet pas de d'écrire l'effet de Stribeck ni celui d'adhérence. Bliman et Sorine ont fait une extension de ce modèle pour intégrer l'effet de Stribeck et d'adhérence en utilisant deux modèles de Dahl de premier ordre en parallèle.

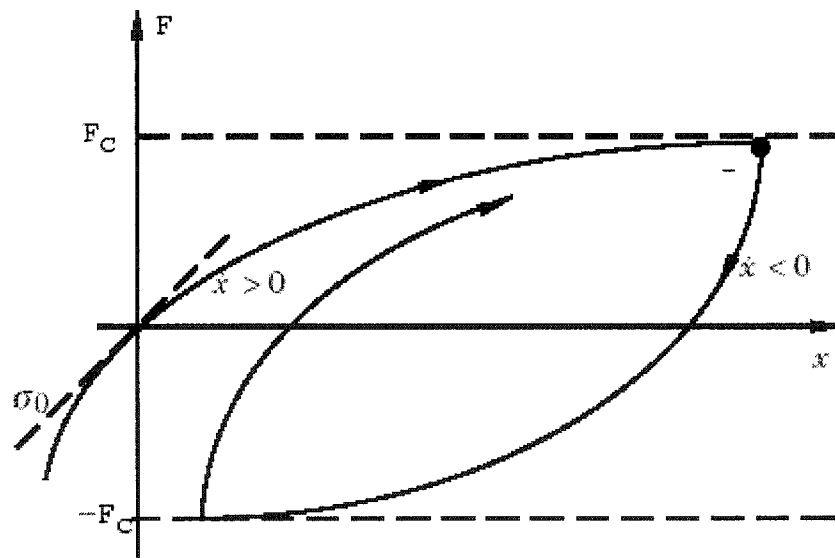


Figure 4 Force de frottement en fonction de la position pour le modèle de Dahl

2.2.2.2 Modèle de frottement de Bliman-Sorine

Le modèle assume que le frottement est indépendant de la vitesse, mais dépend de la

variable $l = \int_0^t |v(\tau)| d\tau$ qui est défini comme le déplacement relatif absolu des corps en

contact quand le signe de la vitesse reste constant [20]. Le modèle est donné dans le domaine de s par le modèle d'état suivant :

$$\begin{aligned}\frac{dx_l}{dl} &= Ax_l + B \operatorname{sgn}(v) \\ F_f &= Cx_l\end{aligned}\tag{2.9}$$

où $\operatorname{sgn}(v)$ représente le signe de la vitesse v et où

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\eta \varepsilon_f} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\varepsilon_f} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{f_1}{\eta \varepsilon_f} \\ -\frac{f_2}{\varepsilon_f} \end{bmatrix} \text{ et } C = [1 \quad 1]$$

avec ε_f la distance entre les surfaces durant le mouvement de préglissement

η est une constante sans dimension.

Ce modèle peut être vu comme la connexion en parallèle de deux modèles de Dahl: un lent et un rapide. Le modèle rapide est caractérisé par le gain statique f_1 tandis que le modèle lent l'est par le gain statique f_2 . f_1 - f_2 correspond au frottement de Coulomb qui est atteint au large déplacement (i.e $l \rightarrow \infty$).

L'écriture du système (2.9) dans le domaine de Laplace est donnée par l'expression suivante :

$$Y = \left(\frac{f_1}{\varepsilon_f \eta S + 1} - \frac{f_2}{\varepsilon_f S + 1} \right) U\tag{2.10}$$

où Y et U sont respectivement les transformées de Laplace de la force de frottement F et du signe de la vitesse v . De la simulation du modèle (2.10), avec les paramètres

physiques $f_1=0.3245$ N, $f_2=0.0368$ N, $\varepsilon_f=0.0028$ m et $\eta=0.2766$, résulte un dépassement interprété comme l'équivalent de l'adhérence dans le modèle dynamique [6]. La figure 5 illustre ce phénomène. Par ailleurs, l'effet de Stribeck n'est présent que sur une certaine distance après que le mouvement soit initié [1].

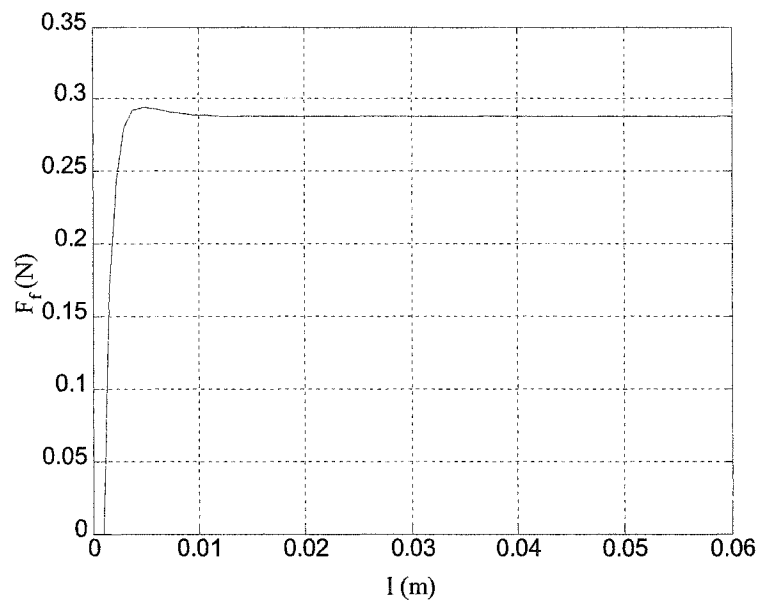


Figure 5 Force de frottement en fonction du déplacement relative absolue du modèle de Bilman et Sorine

Un des inconvénients du modèle de Bilman et Sorine est le fait qu'il se base sur la combinaison de deux modèles de Dahl pour décrire le phénomène d'adhérence. Ceci peut engendrer une discontinuité lors du passage du régime lent au régime rapide. Par contre dans le modèle de LuGre qui sera décrit dans le paragraphe suivant, ce phénomène est décrit en utilisant une variation du coefficient de la vitesse. Un autre inconvénient du modèle de Bilman et Sorine est la caractérisation non exacte de l'effet observé par Stribeck [1]. Cet aspect est également contourné par le modèle de LuGre.

2.2.2.3 Modèle de frottement de LuGre

Le modèle de LuGre a été introduit par Canudas et al. [2]. Il consiste en une généralisation du modèle de Dahl simplifié, où l'effet de Dahl est combiné avec les caractéristiques arbitraires du frottement en état stationnaire, tel que le frottement de Coulomb, le frottement visqueux et l'effet de Stribeck. C'est un modèle dynamique qui a comme entrée la vitesse v et comme sortie la force de frottement F_f . Il décrit le phénomène de frottement à l'échelle microscopique où le contact entre deux corps rigides se fait à travers des fibres élastiques (bristles). Lorsqu'une force extérieure F_e est appliquée, les fibres fléchissent comme des ressorts, tel qu'illustré par la figure 6. La déflexion moyenne des fibres est modélisée par la variable z donné par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{z} = v - \frac{|v|}{\alpha(v)} z \quad (2.11)$$

où z représente la déflexion moyenne des fibres durant la phase d'adhérence, v est la vitesse relative entre les deux surfaces et $\alpha(v)$ est une fonction continue décroissante lorsque la vitesse augmente. Celle-ci permet de caractériser l'effet de Stribeck. La force de frottement due au fléchissement des fibres est décrite par :

$$F_f = \sigma_0 z + \sigma_1 \frac{dz}{dt} \quad (2.12)$$

où σ_0 est la raideur des déformations microscopiques et σ_1 est le coefficient d'amortissement associé à la variation de z . Pour tenir compte du frottement visqueux, le terme proportionnel à la vitesse est ajouté à l'équation (2.12). La force de frottement prend alors la forme suivante :

$$F_f = \sigma_0 z + \sigma_1 \frac{dz}{dt} + \sigma_2 v \quad (2.13)$$

où σ_2 est le coefficient du frottement visqueux. La fonction $\alpha(v)$ qui permet de caractériser l'effet de Stribeck est donnée par :

$$\alpha(v) = \frac{F_c + (F_s - F_c)e^{-(v/v_s)^2}}{\sigma_0} \quad (2.14)$$

où F_s et F_c représentent respectivement le frottement statique et le frottement de Coulomb et v_s est la vitesse de Stribeck.

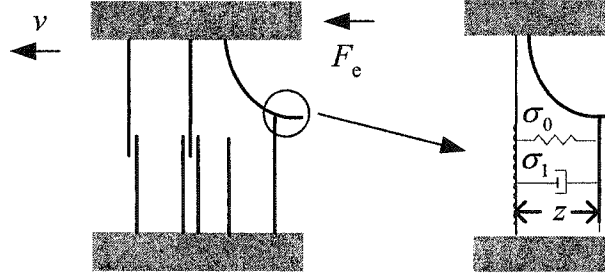


Figure 6 Modélisation ressort –amortisseur du modèle LuGre (vue microscopique du frottement entre deux surfaces en contact)

La force de frottement en régime stationnaire lorsque v est constante est donnée par l'expression suivante :

$$F_{ss}(v) = F_c \operatorname{sgn}(v) + (F_s - F_c)e^{-(v/v_s)^2} + \sigma_2 v \quad (2.15)$$

Cette expression caractérise le modèle statique de Stribeck décrit à la section (2.2.1). Par ailleurs, en régime dynamique, le modèle de LuGre décrit d'autres phénomènes supplémentaires, tels que le retard du frottement (frictionnal lag), le pré glissement

(presliding displacement), les forces de décollement variables (varying break away force) ainsi que le mouvement d'adhérence-glissement (stick-slip motion). Nous allons présenter ces phénomènes dans les paragraphes suivants.

2.2.2.3.1 Déplacement de préglissement

Le préglissement est un mouvement qui se produit à vitesse très proche de zéro où la force de frottement semble être une fonction du déplacement plutôt que de la vitesse. Le phénomène de préglissement a été simulé par le modèle de LuGre [2]. Une force extérieure, dont l'allure est donnée par la figure.7, est appliqué sur une masse unité soumise au frottement. Le système utilisé pour la simulation est le même que celui de la figure 11 en page 22 sans le ressort. Le résultat de la simulation, donné par la figure.8 à la page suivante, montre que lorsque la force extérieure ne dépasse pas la force de frottement statique ($95\% F_s$), le frottement se comporte comme un ressort nonlinéaire, c'est la caractéristique du mouvement du préglissement.

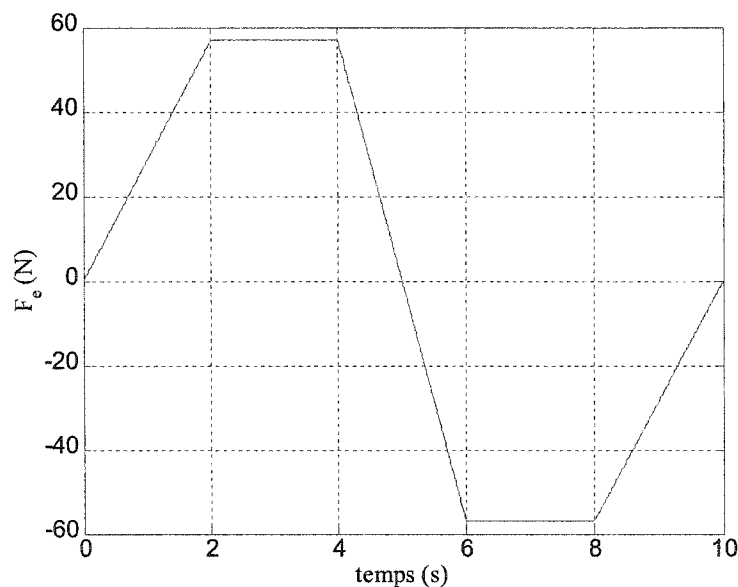


Figure 7 Force extérieure appliquée (95% de la force de frottement statique)

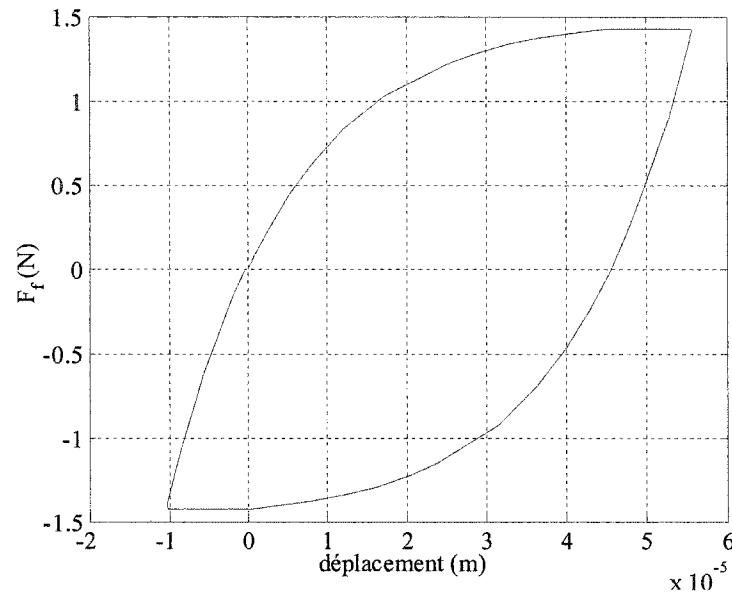


Figure 8 Simulation du mouvement de préglissement avec le modèle de LuGre

2.2.2.3.2 Retard de frottement

Le retard de frottement (frictional lag) est un comportement dynamique qui se produit lorsque le mouvement se fait dans une direction avec une vitesse variable. Ce phénomène a comme conséquence une plus grande force de frottement pour des vitesses croissantes que pour des vitesses décroissantes. Il a été constaté qu'il existe une boucle d'hystérésis entre la force de frottement et la vitesse (figure 9). Autrement dit un délai entre la variation du frottement et la variation de la vitesse. Ce phénomène a été démontré expérimentalement par Hess & Soom [2] et corroboré par le modèle de LuGre [2].

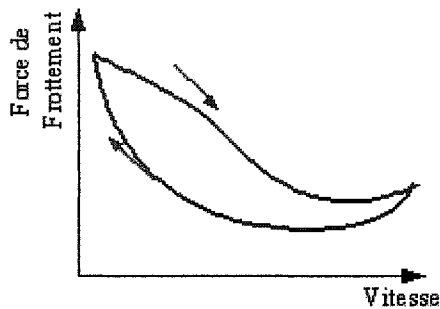


Figure 9 Hystérésis

2.2.2.3.3 Force de décolage variant dans le temps

La force de décolage (Break away force) est la force minimale qui doit être exercée sur un corps au repos, pour qu'il commence à se mouvoir. Autrement dit, il s'agit de la force nécessaire pour vaincre le frottement statique. Johannes [21] a constaté qu'il existe une relation entre le temps durant lequel le corps reste immobile et le taux de variation de la force extérieure appliquée. Le temps de réaction et le taux de variation de la force tangentielle appliquée ont été également examinés séparément [22]. Pour se faire, deux séries d'expériences sur le frottement ont été réalisées: une suppose que le taux de variation de la force appliquée est constant avec un temps de contact variable et l'autre suppose que les deux sont variables mais dépendants. Il a été constaté que la force tangentielle appliquée avec un taux croissant est la seule force qui peut affecter la force statique. Pour Canudas, la force de décolage est obtenue quand l'objet commence à se déplacer. Plus le taux de la force appliquée est grand, plus la force de décolage est petite (figure 10).

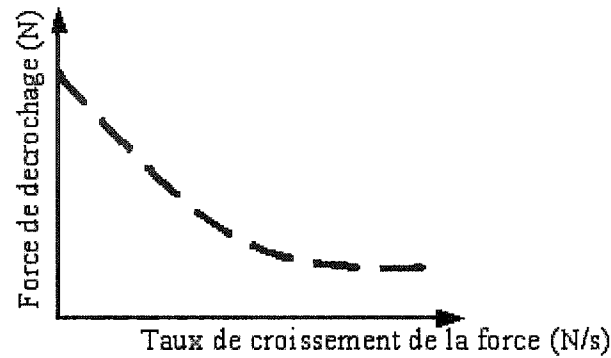


Figure 10 Force de décrochage en fonction du taux de variation de la force extérieure

2.2.2.3.4 Mouvement adhérence-glissement

Le mouvement adhérence–glissement est un phénomène oscillatoire qui se produit dans les systèmes en présence de frottement. Il est causé par la combinaison de l'élasticité du système et de la différence des forces de frottement d'adhérence et de Coulomb.

Le modèle de LuGre permet de représenter ce phénomène puisqu'il inclut la modélisation des forces d'adhérence et de Coulomb. En effet, ce phénomène peut être observé en simulant le mouvement d'une masse unité sur une surface et attachée à son extrémité par un ressort de raideur $k=2$. Ce dernier est tiré avec une vitesse constante de 0.1 m/s (figure 11).

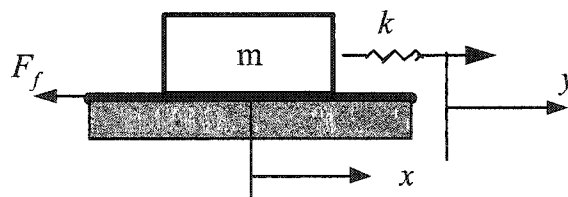


Figure 11 Masse–ressort pour la simulation du mouvement adhérence –glissement

Les résultats de la simulation donnés par la figure 12 montrent que la force dans le ressort augmente linéairement comme la position Y tant que la force dans le ressort ne dépasse pas la force statique (adhérence). Quand la masse commence à se mouvoir (glissement), c'est-à-dire que la force dans le ressort est supérieure (voir la figure 12) à la force statique, la force de frottement décroît rapidement sous l'effet de Stribeck, le ressort se contracte, la force dans le ressort diminue, la masse ralentit jusqu'à s'arrêter. Le mouvement adhérence–glissement se répète et la masse se déplace de façon saccadée.

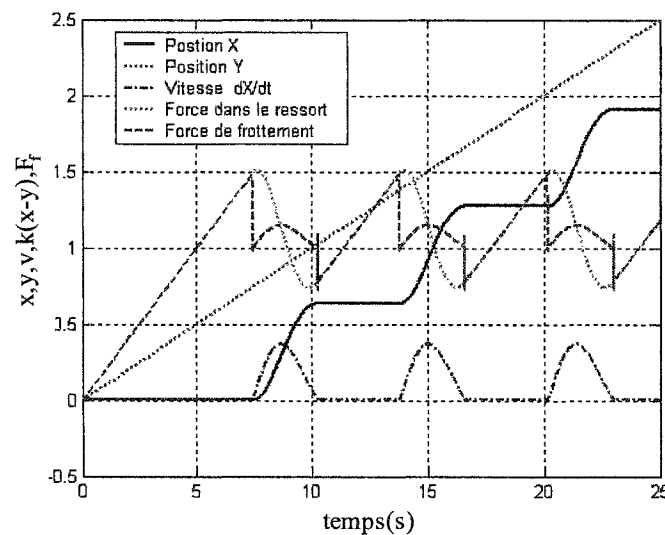


Figure 12 Simulation du mouvement adhérence –glissement

Le modèle de LuGre tel que présenté dans ce paragraphe permet de décrire la plupart des phénomènes que le frottement peut engendrer entre deux surfaces en contact. D'autres modèles tels que celui de Swevers [10] ont cependant été proposés pour palier à certains inconvénients du modèle de LuGre. Le premier inconvénient soulevé concerne le mouvement de préglissement qui est modélisé par une fonction linéaire de la variable interne z . Selon Swevers, cette caractéristique rend le modèle de LuGre trop dissipatif. Le deuxième inconvénient concerne le phénomène d'hystérésis qui n'est pas

parfaitement représenté par le modèle de LuGre. En fait, Swevers prétend que l'hystérésis doit être modélisé par une fonction à mémoire non localisée (no local memory) [3]. Le modèle de Swevers permet de palier à ces inconvénients. Il demeure cependant beaucoup plus complexe que le modèle de LuGre. Cette caractéristique le rend difficile à utiliser pour la conception de système de commande de position. Le modèle de LuGre demeure donc un des plus intéressants de par sa simplicité et l'ensemble des phénomènes statiques et dynamiques qu'il peut représenter.

2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les différentes composantes d'un modèle de frottement statique. Ensuite, nous avons présenté le modèle classique de Karnopp qui est le plus connu pour finalement présenter les modèles dynamiques les plus souvent cités dans la littérature.

Le modèle de LuGre demeure l'un des plus intéressants de par sa simplicité et l'ensemble des phénomènes statiques et dynamiques qu'il peut représenter. Ce modèle est cependant caractérisé par six paramètres qui peuvent être obtenus seulement grâce à des techniques d'identification. Dans les chapitres suivants, une approche sera présentée pour identifier ces paramètres à l'aide de l'analyse par intervalle.

CHAPITRE 3

ANALYSE D'INTERVALLE

3.1 Introduction

L'analyse par intervalle a été introduite dans les années 60 dans le but de pallier aux erreurs d'arrondis et de troncation introduites par les ordinateurs. L'un des pionniers de cette approche est R.E. Moore [23], [24]. Depuis, l'analyse par intervalle a vu des extensions pour résoudre des problèmes posés en mathématique et dans les sciences du génie. Cette approche permet de résoudre des problèmes non linéaires que les méthodes classiques ne peuvent résoudre adéquatement, en particulier, lorsque les données intervenant dans les problèmes sont incertaines.

Avant d'aborder la partie sur l'analyse d'intervalle, nous allons rappeler les règles générales des opérations sur les ensembles, les fonctions ensemblistes et les calculs ensemblistes. En fait, un grand nombre d'algorithmes utilisant le calcul par intervalle combinent les opérations ensemblistes, telles que l'union et l'intersection avec l'arithmétique des intervalles [5].

3.2 Opérateurs ensemblistes

Deux types d'opérations peuvent être envisagées sur les ensembles [5]: les opérations pures, telles que l'intersection, l'union, le produit cartésien et la projection et les opérations étendues, dont la définition est obtenue par extension des opérations sur les éléments de ces ensembles.

3.2.1 Opérations ensemblistes pures

Soient deux sous-ensembles \mathbb{X} et \mathbb{Y} de \mathbb{R}^m et \mathbb{R}^n . Le produit cartésien \mathbb{Z} de ces deux ensembles est défini par :

$$\mathbb{Z} = \mathbb{X} \times \mathbb{Y} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m} \mid x \in \mathbb{X} \wedge y \in \mathbb{Y} \right\} \quad (3.1)$$

où \wedge désigne l'opérateur logique « et ». Lorsque \mathbb{Z}' est un sous-ensemble de \mathbb{Z} , la projection de \mathbb{Z}' sur \mathbb{X} est définie par :

$$proj_{\mathbb{X}}(\mathbb{Z}') = \left\{ x \in \mathbb{X} \mid \exists y \in \mathbb{Y}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}' \right\} \quad (3.2)$$

L'intersection et l'union des deux ensembles \mathbb{X} et \mathbb{Y} sont définies par

$$\mathbb{X} \cap \mathbb{Y} = \{ x \mid x \in \mathbb{X} \wedge x \in \mathbb{Y} \} \quad (3.3)$$

$$\mathbb{X} \cup \mathbb{Y} = \{ x \mid x \in \mathbb{X} \vee x \in \mathbb{Y} \} \quad (3.4)$$

où \vee désigne l'opérateur logique « ou ».

3.2.2 Opérations étendues

On considère deux ensembles \mathbb{X} et \mathbb{Y} et une fonction $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$. Si $\mathbb{X}_1 \subset \mathbb{X}$, alors l'image directe de \mathbb{X}_1 par la fonction f est définie par :

$$f(\mathbb{X}_1) = \{ f(x) \mid x \in \mathbb{X}_1 \} \quad (3.5)$$

Si $\mathbb{Y}_1 \subset \mathbb{Y}$, alors l'image réciproque de \mathbb{Y}_1 par f est définie par :

$$f^{-1}(\mathbb{Y}_1) = \{x \in \mathbb{X} \mid f(x) \in \mathbb{Y}_1\} \quad (3.6)$$

Les opérations suivantes sont essentielles puisqu'elles sont utilisées dans l'algorithme d'inversion ensembliste qui sera présenté au paragraphe 3.4. Soit \mathbb{X}_1 et \mathbb{X}_2 (respectivement \mathbb{Y}_1 et \mathbb{Y}_2), deux sous-ensembles de \mathbb{X} (respectivement de \mathbb{Y}). Dans ce contexte, les relations (3.5) et (3.6) permettent de déduire que les opérations d'intersection et d'union respectent les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} f(\mathbb{X}_1 \cap \mathbb{X}_2) &\subset f(\mathbb{X}_1) \cap f(\mathbb{X}_2) \\ f^{-1}(\mathbb{Y}_1 \cap \mathbb{Y}_2) &= f^{-1}(\mathbb{Y}_1) \cap f^{-1}(\mathbb{Y}_2) \end{aligned} \quad (3.7)$$

et

$$\begin{aligned} f(\mathbb{X}_1 \cup \mathbb{X}_2) &= f(\mathbb{X}_1) \cup f(\mathbb{X}_2) \\ f^{-1}(\mathbb{Y}_1 \cup \mathbb{Y}_2) &= f^{-1}(\mathbb{Y}_1) \cup f^{-1}(\mathbb{Y}_2) \end{aligned} \quad (3.8)$$

De même, la composition des fonctions respecte les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} f[f^{-1}(\mathbb{Y})] &\subseteq \mathbb{Y} \\ f^{-1}[f(\mathbb{X})] &\supseteq \mathbb{X} \end{aligned} \quad (3.9)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{X}_1 \subset \mathbb{X}_2 &\Rightarrow f(\mathbb{X}_1) \subset f(\mathbb{X}_2) \\ \mathbb{Y}_1 \subset \mathbb{Y}_2 &\Rightarrow f^{-1}(\mathbb{Y}_1) \subset f^{-1}(\mathbb{Y}_2) \end{aligned} \quad (3.10)$$

La preuve de ces propriétés se trouve en annexe 1.

Notons également que $\mathbb{X} \subset \mathbb{Y}_1 \times \mathbb{Y}_2 \Rightarrow \mathbb{X} \subset \text{proj}_{\mathbb{Y}_1}(\mathbb{X}) \times \text{proj}_{\mathbb{Y}_2}(\mathbb{X})$. De la même manière, il est possible d'étendre les opérations de nombres ou de vecteurs sur des ensembles. Notons $\mathcal{P}(\mathbb{X})$ l'ensemble des parties (Power set) de \mathbb{X} , constitue l'ensemble qui contient tous les sous-ensembles appartenant à \mathbb{X} , y compris l'ensemble vide : c'est-à-dire, si par exemple, $\mathbb{X} = \{a, b, c\}$, alors $\mathcal{P}(\mathbb{X}) = \{\{\emptyset\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

Soit \circ l'opérateur binaire de $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ dans \mathbb{Z} . L'extension peut alors être faite de la manière suivante :

$$\mathbb{X}_1 \circ \mathbb{Y}_1 = \{x \circ y \mid x \in \mathbb{X}_1, y \in \mathbb{Y}_1\} \quad (3.11)$$

où \circ est maintenant un opérateur de $\mathcal{P}(\mathbb{X} \times \mathbb{Y})$ à $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$. Si, par exemple, \mathbb{X}_1 et \mathbb{Y}_1 sont deux sous ensembles de \mathbb{R}^n , alors

$$\begin{aligned} \mathbb{X}_1 + \mathbb{Y}_1 &= \{x + y \mid x \in \mathbb{X}_1, y \in \mathbb{Y}_1\} \\ \mathbb{X}_1 - \mathbb{Y}_1 &= \{x - y \mid x \in \mathbb{X}_1, y \in \mathbb{Y}_1\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Notons qu'on ne doit pas confondre l'ensemble $\mathbb{X}_1 - \mathbb{X}_1 = \{x - y \mid x \in \mathbb{X}_1, y \in \mathbb{X}_1\}$ avec l'ensemble $\mathbb{X}_1 - \mathbb{X}_1 = \{x - x \mid x \in \mathbb{X}_1\} = \{0\}$. Par ce que lorsque on effectue des opérations sur des ensembles associés aux mêmes quantités réelles en faisant comme si ils étaient indépendantes.

La manipulation des ensembles requiert donc beaucoup de précaution. Comme par exemple dans le cas de ces deux expressions qui ne sont pas équivalentes :

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &= \mathbb{X} + \mathbb{Y} \\ \mathbb{X} &= \mathbb{Z} - \mathbb{Y} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Prenons un exemple pour mieux illustrer l'idée.

Exemple 3.2.1 : Soient $\mathbb{X} = [0, 2]$, $\mathbb{Y} = [-2, 0]$, $\mathbb{Z} = [0]$. Bien que les règles de calcul par intervalle seront présentées au paragraphe (3.4), il est facile de vérifier que

$$\mathbb{Z} - \mathbb{Y} = [0, 2] = \mathbb{X} \quad (3.14)$$

par contre

$$\mathbb{X} + \mathbb{Y} = [-2, 2] \supsetneq \mathbb{Z} \quad (3.15)$$

La manipulation de fonctions classiques dans le cadre des ensembles requiert aussi une grande prudence. Le théorème suivant traite justement ce problème.

Théorème 3.2.1 [5] Soit la fonction f définie sur \mathbb{X}^m à valeur dans $\mathbb{Y} \subset \mathbb{R}$, pour laquelle nous disposons d'une expression explicite comportant uniquement des fonctions et des opérateurs. Soit \mathbb{F} la fonction de $\mathcal{P}(\mathbb{X}^m)$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{Y})$ obtenue en remplaçant chaque occurrence de la variable x_i ; $i = 1, \dots, m$; par l'ensemble \mathbb{X}_i ; $i = 1, \dots, m$. Alors, en posant

$$f(\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_m) = \{f(x_1, \dots, x_m) \mid x_1 \in \mathbb{X}_1, \dots, x_m \in \mathbb{X}_m\} \quad (3.16)$$

on obtient :

$$f(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \dots, \mathbb{X}_m) \subset \mathbb{F}(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \dots, \mathbb{X}_m) \quad (3.17)$$

De plus, si chaque variable x_i apparaît une seule fois dans l'expression formelle de f , alors :

$$f(\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_m) = \mathbb{F}(\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_m) \quad (3.18)$$

L'inclusion est une conséquence de l'effet de dépendance qui est illustré par l'exemple suivant.

Exemple 3.2.2 : Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - x_1$. Alors

$$f(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2) = \{x_1 + x_2 - x_1 \mid x_1 \in \mathbb{X}_1, x_2 \in \mathbb{X}_2\} = \mathbb{X}_2$$

et

$$\mathbb{F}(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2) = \mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2 - \mathbb{X}_1 = \{x_1 + x_2 - x_3 \mid x_1 \in \mathbb{X}_1, x_2 \in \mathbb{X}_2, x_3 \in \mathbb{X}_1\}$$

Il est évident que $f(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2) \subset \mathbb{F}(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2)$. Dans l'expression de $\mathbb{F}(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2)$, les variables x_1 et x_3 ne représentent plus la même variable, ils sont considérées comme des variables indépendantes. $\mathbb{F}(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2)$ est une approximation extérieure (outer set) de $f(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2)$, à cause de l'occurrence de la variable x_1 dans l'expression formelle de f . Le calcul ensembliste est pessimiste, mais ses propriétés sont importantes.

Nous reviendrons sur les fonctions ensemblistes dans le paragraphe portant sur le calcul par intervalle. On définira alors les notions de fonction d'inclusion qui découlent directement du théorème 3.2.1.

3.3 Enveloppes

Les opérations définies précédemment permettent de manipuler les ensembles comme des objets. Mais, lors de la mise en oeuvre d'algorithmes, il est difficile de traiter des ensembles \mathbb{X} de forme quelconque. Au lieu de développer des algorithmes pour des ensembles quelconques, on sélectionne des ensembles exploitables tels que les

intervalles, les ellipsoïdes ou des unions de pavés définis plus tard à la page 36 formant une approximation de l'ensemble \mathbb{X} appelés enveloppes ou récipients.

Soit $\mathbb{I}\mathcal{X}$ l'ensemble des récipients possibles sur \mathbb{X} . Le choix du récipient \mathcal{X} résulte d'un compromis. D'abord, le calcul des opérations ensemblistes sur \mathcal{X} doit être simple. Pour que le calcul effectué soit garanti, l'enveloppe \mathcal{X} doit être une approximation extérieure de l'ensemble \mathbb{X} , c'est-à-dire l'inclusion de \mathbb{X} dans \mathcal{X} doit être vérifiée. D'un autre côté, on doit s'assurer que $\mathbb{I}\mathcal{X}$ ne contient que des éléments convexes et qu'il soit fermé pour l'intersection, c'est-à-dire :

$$\mathcal{X}_1 \in \mathbb{I}\mathcal{X}, \mathcal{X}_2 \in \mathbb{I}\mathcal{X} \Rightarrow \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2 \in \mathbb{I}\mathcal{X} \quad (3.19)$$

Rappelons que la notion de convexité est définie comme suit : Dans un espace affine, un ensemble E est dit convexe, si et seulement si, tous les segments de droite joignant deux éléments de l'ensemble E sont toujours dans E .

Nous étendons les opérations qu'on a défini au paragraphe 2.2 au cas de récipients. Soient \mathbb{X}_1 et \mathbb{Y}_1 deux sous-ensembles respectivement de \mathbb{X} et \mathbb{Y} . L'extension est alors définie comme suit :

$$\mathbb{X}_1 [\circ] \mathbb{Y}_1 = [\{x_1 \circ y_1 \mid x_1 \in \mathbb{X}_1, y_1 \in \mathbb{Y}_1\}] = [\mathbb{X}_1 \circ \mathbb{Y}_1] \quad (3.20)$$

où $[\mathbb{X}]$ est le plus petit récipient contenant \mathbb{X} . On vérifie alors bien $\mathbb{X}_1 \circ \mathbb{Y}_1 \subset \mathbb{X}_1 [\circ] \mathbb{Y}_1$.

Ceci parce que, $[\mathbb{X}]$ et $[\mathbb{Y}]$ sont respectivement les récipients qui contiennent les ensembles \mathbb{X} et \mathbb{Y} et par conséquent toute opération faite sur ces ensembles sera contenue dans le récipient résultant de l'opération des récipients associés à chacun de ces ensembles.

Parmi l'ensemble de ces opérations étendues, on distinguera le cas de l'union. On définit l'opérateur \cup par :

$$\mathbb{X}[\cup]\mathbb{Y} = [\mathbb{X} \cup \mathbb{Y}] \quad (3.21)$$

et les fonctions de la façon suivante :

$$[f](\mathbb{X}_1) = [\{f(x) \mid x \in \mathbb{X}_1\}]$$

de sorte que

$$f(\mathbb{X}_1) \subset [f](\mathbb{X}_1) \quad (3.22)$$

L'inclusion traduit l'effet d'enveloppement qui caractérise le pessimisme introduit. Voici un exemple qui illustre ce phénomène.

Exemple 3.3.1 : Soit l'ensemble $\mathbb{X} = [1, 4]$. On cherche à déterminer l'ensemble \mathbb{Y} tel que

$$\mathbb{Y}^2 = \mathbb{X} = \{y \in \mathbb{R} \mid y^2 = x, x \in \mathbb{X}\}.$$

\mathbb{Y} est l'union de deux intervalles $[-2, 1]$ et $[1, 2]$ comme le montre la figure.13. On voit bien que si le récipient $\mathcal{Y} = [-2, 2]$ est choisi pour décrire \mathbb{Y} , alors on a $\mathcal{Y} \supset \mathbb{Y}$.

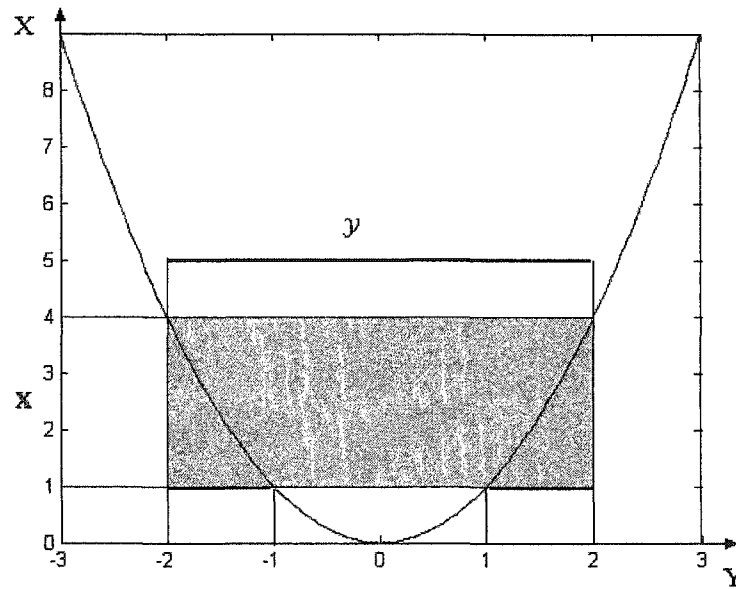


Figure 13 Ensemble image \mathbb{Y} et enveloppe \mathcal{Y} de l'ensemble \mathbb{X}

Dans le cas où les réceptifs choisis sont des intervalles ou des pavés, ces règles de calcul peuvent être facilement explicitées. C'est l'objet du paragraphe suivant.

3.4 Analyse d'intervalle

Dans cette section, des concepts de base sur les intervalles et sur l'arithmétique des intervalles seront discutés.

3.4.1 Intervalle

Un intervalle noté $[X]$ de \mathbb{R} est un sous-ensemble fermé et borné de \mathbb{R} défini comme suit :

$$[X] = [\underline{X} \ \bar{X}] = \{X \mid \underline{X} \leq X \leq \bar{X}\} \quad (3.23)$$

où \underline{X} et \bar{X} représentent respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de l'intervalle $[X]$. À titre d'exemple considérons le nombre réel π . Évidemment la valeur de π n'est pas représentable en utilisant l'arithmétique de précision finie. Cependant, il peut être borné en utilisant l'intervalle $[X] = [3.14, 3.15]$.

Le centre de l'intervalle $[X]$ est donné par :

$$Mid[X] = \frac{\underline{X} + \bar{X}}{2} \quad (3.24)$$

et son rayon par :

$$r[X] = w([X]) = \frac{\bar{X} - \underline{X}}{2} \quad (3.25)$$

où la quantité $w([X])$ est appelée la taille de l'intervalle $[X]$. Dans la suite de ce document, nous utiliserons la notation (3.23) et l'ensemble des intervalles sera noté par \mathbb{IR} .

3.4.2 Arithmétique d'intervalle

L'arithmétique des intervalles est une extension de l'arithmétique sur les réels. La majorité des opérations sur des intervalles peuvent être obtenues à partir de calcul sur les bornes de ces intervalles. Soient \circ un opérateur dans l'ensemble $\{+, -, *, /\}$ et $[X]$, $[Y]$ deux intervalles dans \mathbb{R} , alors

$$[X] \circ [Y] = \left[\left\{ X \circ Y \in \mathbb{R} \mid X \in [X], Y \in [Y] \right\} \right] \quad (3.26)$$

On explicitera les quatre opérations de bases par les exemples suivants :

Addition :

Soient $[X]$ et $[Y]$ deux intervalles dans \mathbb{R} , la somme de ces deux intervalles est donnée par :

$$[Z] = [X] + [Y] = [\underline{X} + \underline{Y}, \bar{X} + \bar{Y}] \quad (3.27)$$

Si par exemple $[X] = [-1, 3]$ et $[Y] = [2, 7]$ alors $[Z] = [-1 + 2, 3 + 7] = [1, 10]$.

Soustraction :

La soustraction de deux intervalles s'écrit de la façon suivante :

$$[Z] = [X] - [Y] = [\underline{X} - \bar{Y}, \bar{X} - \underline{Y}] \quad (3.28)$$

Toujours avec les mêmes intervalles on obtient pour la soustraction $[Z] = [-1 - 7, 3 - 2] = [-8, 1]$

Multiplication :

La multiplication de deux intervalles est définie comme suit :

$$[X] * [Y] = [\min(\underline{X} * \underline{Y}, \underline{X} * \bar{Y}, \bar{X} * \underline{Y}, \bar{X} * \bar{Y}), \max(\underline{X} * \underline{Y}, \underline{X} * \bar{Y}, \bar{X} * \underline{Y}, \bar{X} * \bar{Y})] \quad (3.29)$$

Dans ce cas pour les intervalles $[x]$ et $[y]$ déjà considérés, on obtient $[X] * [Y] = [-7, 21]$.

Division :

Pour la division sur un intervalle, on distingue les cas suivants pour l'opération $\frac{1}{[Y]}$

$$\frac{1}{[Y]} = \begin{cases} 0 & \text{si } [Y]=0 \\ \frac{1}{[\underline{Y}, \bar{Y}]} & \text{si } 0 \notin [Y] \\ \frac{1}{[\bar{Y}, \infty]} & \text{si } \underline{Y} = 0 \text{ et } \bar{Y} \succ 0 \\ \frac{1}{[-\infty, \bar{Y}]} & \text{si } \underline{Y} \prec 0 \text{ et } \bar{Y} = 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

Pour le rapport de deux intervalles, il découle directement de (3.29) et (3.30)

$$\frac{[X]}{[Y]} = [X] * \left(\frac{1}{[Y]} \right) \quad (3.31)$$

L'arithmétique sur les intervalles réels, qui a été présenté dans ce paragraphe, s'applique de la même façon sur des vecteurs d'intervalles qui sont également appelés pavés.

3.4.3 Pavé

Un pavé ou un vecteur d'intervalle $[X]$ est un sous-ensemble de \mathbb{R}^m , obtenu en remplaçant les m composantes d'un vecteur réel par m composantes d'intervalles. Autrement dit, un pavé est le résultat du produit cartésien de m intervalles, c'est-à-dire :

$$[X] = [X_1] \times [X_2] \times \dots \times [X_m] \quad (3.32)$$

La taille d'un pavé $[\mathbf{X}]$ est la plus grande taille de toutes ses composantes

$$w[\mathbf{X}] = \max w([X_i]), \text{ pour } i=1, \dots, m$$

Une illustration graphique d'un pavé de dimension 2 est donnée dans la figure 14.

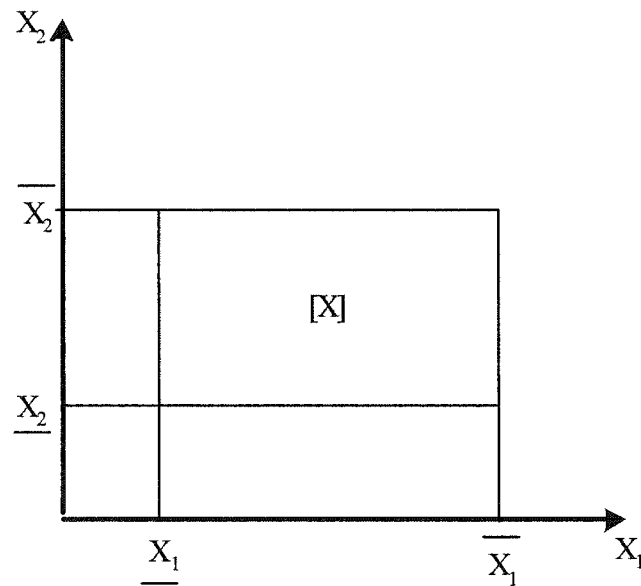


Figure 14 Pavé $[\mathbf{X}]$ de dimension 2

3.4.4 Fonction d'inclusion

Soit une fonction f de \mathbb{R}^m à valeur dans \mathbb{R}^n . La fonction intervalle $[f] : \mathbb{IR}^m \rightarrow \mathbb{IR}^n$ est une fonction d'inclusion pour f si

$$\forall [\mathbf{X}] \in \mathbb{IR}^m, f([\mathbf{X}]) \subset [f]([\mathbf{X}]) \quad (3.33)$$

La fonction $[f]$ est une fonction d'inclusion de n'importe quelle fonction f de \mathbb{R}^n à valeur dans \mathbb{R}^n . Par contre, cette fonction n'est d'aucun intérêt lorsqu'elle est trop pessimiste. L'objectif de l'analyse par intervalle est de construire des fonctions d'inclusion les moins pessimistes possibles; c'est à dire pour lesquelles la taille de $[f]([X])$ est petite tout en respectant la condition d'inclusion. En raison du phénomène de dépendance et d'enveloppement, il est souvent difficile de construire des fonctions d'inclusion optimales (dont la taille de l'image est minimale).

Pour illustrer la notion de fonction d'inclusion, considérons une fonction f de \mathbb{R}^2 à valeur dans \mathbb{R}^2 . L'image $f([X])$ peut avoir n'importe quelle forme, elle peut être non convexe ou discontinue. Cependant, peu importe la forme de $f([X])$, la fonction d'inclusion $[f]$ permet de calculer un pavé qui inclut entièrement $f([X])$, (voir figure 15).

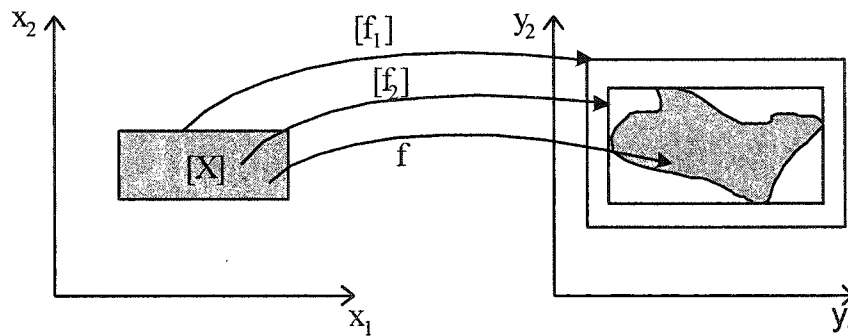


Figure 15 Image du pavé $[X]$ par la fonction f et les fonctions d'inclusion $[f_1]$ et $[f_2]$

3.4.4.1 Monotonie et convergence

Une fonction d'inclusion $[f]$ est dite *monotone* au sens de l'inclusion si

$$[X] \subset [Y] \Rightarrow [f]([X]) \subset [f]([Y]) \quad (3.34)$$

Une fonction d'inclusion $[f]$ est dite *convergente* si, pour toute suite de pavés $[X](k)$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} w([X](k)) = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} w([f]([X](k))) = 0 \quad (3.35)$$

Noter qu'il n'existe pas de fonction d'inclusion convergente pour f si f n'est pas continue.

3.4.4.2 Fonction d'inclusion minimale

Parmi toutes les fonctions d'inclusions $[f]$ de la fonction f , il en existe une seule qui soit minimale au sens de l'inclusion, il s'agit de la fonction d'inclusion minimale notée $[f]^*$. Comme le montre la figure 15, la fonction d'inclusion $[f_2]$ est minimale, car le pavé $[f_2]([X])$ est le plus petit pavé qui contient $f([X])$.

3.4.4.3 Fonction d'inclusion naturelle

Les situations où la fonction d'inclusion minimale $[f]^*$ de f peut être calculée sont très rares. Quand f résulte de composition d'opérateurs ou de fonctions élémentaires réelles, nous n'arrivons jamais à la calculer. Une approche alternative consiste à évaluer une autre fonction d'inclusion qui n'est pas nécessairement minimale en utilisant le théorème suivant qui découle directement du théorème 3.2.1.

Théorème 3.4.1 [5] Une fonction d'inclusion monotone dite *fonction d'inclusion naturelle* est obtenue en remplaçant chaque occurrence des variables x_i , $i = 1, \dots, m$ dans l'expression formelle de f par l'intervalle correspondant, tous les opérateurs réels par les opérateurs arithmétiques sur les intervalles correspondants et les fonctions élémentaires par les fonctions d'inclusion associées.

Les fonctions d'inclusion naturelles ne sont généralement pas minimales à cause du phénomène de dépendance et de l'effet d'enveloppement. Cependant, lorsque chaque composante x_i n'apparaît qu'une seule fois, la fonction d'inclusion naturelle est égale à la fonction d'inclusion minimale comme le montre l'exemple 3.4.1. Par conséquent, les fonctions d'inclusion peuvent être sensiblement améliorées en remaniant l'expression formelle de f .

Exemple 3.4.1: Considérons les trois expressions formelles de la même fonction $f(x)$

$$f_1(x) = (x-1)^2 - 1,$$

$$f_2(x) = x(x-2),$$

$$f_3(x) = x^2 - 2x$$

Évaluons leurs fonctions d'inclusion naturelles pour l'intervalle $[X] = [0, 1]$:

$$[f_1]([X]) = ([X]-1)^2 - 1 = [-1, 0]$$

$$[f_2]([X]) = [X]([X]-2) = [-2, 0]$$

$$[f_3]([X]) = [X]^2 - 2[X] = [-2, 1]$$

La fonction d'inclusion $[f_1]([X])$ est minimale, car dans l'expression formelle de f_1 , la variable x n'apparaît qu'une seule fois. Tandis que dans les expressions formelles de f_2

et de f_3 , la variable x apparaît plus d'une fois. Les fonctions d'inclusion $[f_2]([X])$ et $[f_3]([X])$ sont alors considérées comme pessimistes.

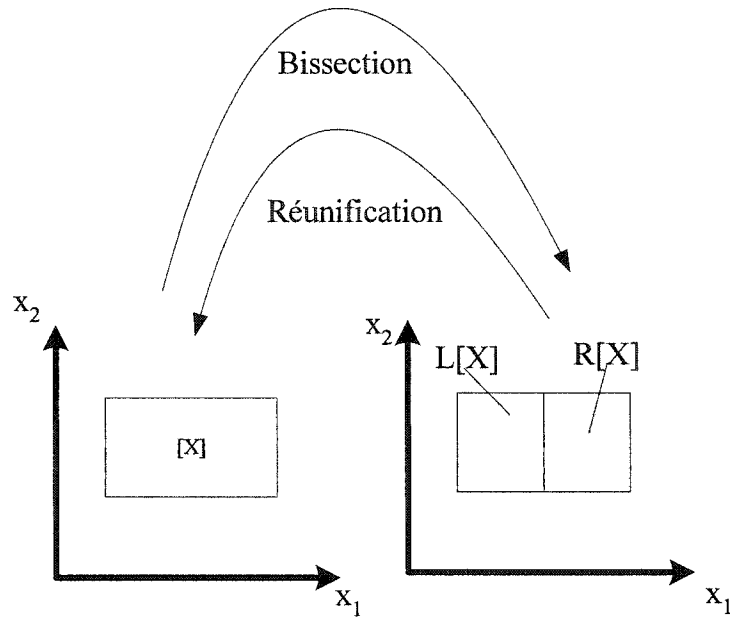
Il existe d'autres techniques d'évaluation de la fonction d'inclusion, tel que le développement de Taylor, les fonctions d'inclusion centrées, et centrées mixtes. Une comparaison de ces approches est présentée dans [5]. Les conclusions de cette étude stipulent que le choix de la méthode dépend de la nature de la fonction traitée. Même si les fonctions d'inclusion sont généralement pessimistes, l'image de f peut-être approximée de façon précise par un ensemble de pavés. Ces pavés peuvent être obtenus grâce à l'outil de bisection qui est présenté dans le paragraphe 3.4.5.

3.4.5 Bisection

Soit un pavé $[X] \subset \mathbb{R}^m$ $[X] = [X_1] \times \dots \times [X_m]$, et soit i l'indice de la composante $[X_i]$ de taille la plus grande (éventuellement si $w([X_j]) = w([X_k]) = w([X])$, alors $i = \min(j, k)$). La *bisection* consiste à découper le pavé $[X]$ suivant son plan principal qui est le plan de symétrie de $[X]$ perpendiculaire au côté de plus grande taille. Les pavés engendrés par la bisection sont :

$$\begin{aligned} L[X] &= [X_1] \times \dots \times [\underline{X}_i, X_{0i}] \times \dots [X_m] \\ R[X] &= [x_1] \times \dots \times [x_{0i}, \bar{X}_i] \times \dots [X_m] \end{aligned}$$

L'opération inverse qui consiste à reconstituer le pavé original est appelée *réunification*. Un exemple est donné par la figure 16.

Figure 16 Bissection du pavé $[X]$

Puisque les fonctions d'inclusions sont particulièrement efficaces pour des pavés de faible taille, il est possible d'évaluer plus efficacement l'image $f([X])$ en évaluant l'image des pavés bissectés par f , lorsque $[f]$ est monotone au sens d'inclusion,

$$f([X]) \subset [f](L[X]) \cup [f](R[X]) \subset [f]([X])$$

En effet, comme $L[X] \subset [X]$ et $R[X] \subset [X]$, si $[f]$ est monotone, on a $[f](L[X]) \subset [f]([X])$ et $[f](R[X]) \subset [f]([X])$, donc

$$[f](L[X]) \cup [f](R[X]) \subset [f]([X])$$

Puis, pour tout $X \in [X]$, $X \in L[X]$ ou $X \in R[X]$. Ainsi, par définition de la fonction d'inclusion, on a $[f]([X]) \subset [f](L[X])$ ou $[f]([X]) \subset [f](R[X])$, et donc

$$f([X]) \subset [f](L[X]) \cup [f](R[X]) \subset [f]([X])$$

et

$$\forall X \in [X], f(X) \subset [f](L[X]) \cup [f](R[X]) \quad (3.36)$$

Une illustration graphique de cette méthode est donnée par la figure suivante.

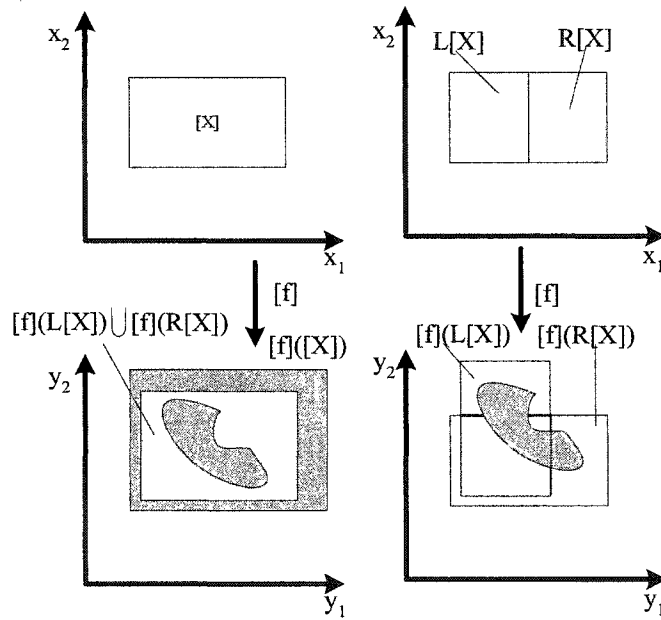


Figure 17 Évaluation de l'image d'une fonction par bisection

Dans l'exemple de la figure 17, il est clair que l'image de la fonction obtenue par bisection est moins pessimiste que celle obtenue du pavé original. Reprenons l'exemple (3.4.1) pour la fonction f_3 .

Exemple 3.4.2 : En considérant $[X] = [0, 1]$, sa bisection est donnée par $L[X] = [0, 0.5]$ et $R[X] = [0.5, 1]$. L'image de ces deux intervalles pour la fonction

$$f_3(x) = x(x - 2)$$

est

$$\begin{aligned} [f_3](L[\mathbf{X}]) &= [0, 0.5]([0, 0.5] - 2) = [-1, 0] \\ [f_3](R[\mathbf{X}]) &= [0.5, 1]([0.5, 1] - 2) = [-1.5, -0.5] \end{aligned}$$

d'où

$$[f](\mathbf{X}) = [f_3](L[\mathbf{X}]) \cup [f_3](R[\mathbf{X}]) = [-1.5, 0]$$

Ce résultat est moins pessimiste que celui trouvé dans l'exemple 3.4.1 qui était de $[-2, 1]$. L'outil de bisection permet donc de caractériser les ensembles non pas par un seul pavé, mais par une union de pavés qui ne se chevauchent pas, appelés des *sous-pavages* réguliers.

3.4.6 Sous-pavage

Un sous-pavage $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^m$ est une union de pavés $([\mathbf{X}])_{i=1..n}$ dont les intérieurs sont disjoints, ce qui signifie que leur intersection deux à deux est vide sauf éventuellement sur les frontières. Le but premier de sous-pavages est d'approximer les sous-ensembles de \mathbb{R}^m . Ils présentent le double avantage d'être facilement représentables par les ordinateurs et de pouvoir supporter les calculs ensemblistes grâce au calcul par intervalle. Pour savoir si un sous-pavage est une solution, une partie de la solution, ou n'est pas une solution, on doit le soumettre à un test qui est défini dans le paragraphe suivant.

3.4.7 Test d'inclusion

Un test sur un élément X de \mathbb{R}^m est une fonction binaire $t: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{B}$ où \mathbb{B} est l'ensemble des booléens $\mathbb{B} = \{0,1\}$, ou encore $\mathbb{B} = \{\text{faux}, \text{vrai}\}$. Un test d'inclusion sur t est une fonction $[t]: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{IB}$ tel que $\forall [\mathbf{X}] \in \mathbb{IR}^m$,

$$\begin{aligned} ([t]([\mathbf{X}]) = 1) &\Rightarrow (\forall X \in [\mathbf{X}], t(X) = 1), \\ ([t]([\mathbf{X}]) = 0) &\Rightarrow (\forall X \in [\mathbf{X}], t(X) = 0) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Le test d'inclusion ainsi que la bisection présentée dans le paragraphe 3.4.5 seront utilisés dans la prochaine section pour obtenir une approximation de l'image inverse d'une fonction ensembliste pour un pavé ou un sous-pavé \mathbb{Y} . L'algorithme présenté permettra d'encadrer l'ensemble solution \mathbb{X} par des approximations intérieure $\underline{\mathbb{X}}$ et extérieure $\bar{\mathbb{X}}$ tel que :

$$\underline{\mathbb{X}} \subset \mathbb{X} \subset \bar{\mathbb{X}}$$

3.4.8 Inversion ensembliste

Soient $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction qui peut être nonlinéaire et \mathbb{Y} un sous-ensemble de \mathbb{R}^n (dans notre cas un pavé ou un sous-pavage). L'inversion ensembliste est la caractérisation de l'ensemble \mathbb{X} image réciproque de l'ensemble \mathbb{Y} tel que

$$\mathbb{X} = \{X \in \mathbb{R}^m \mid f(X) \in \mathbb{Y}\} = f^{-1}(\mathbb{Y}) \quad (3.38)$$

Pour tout $\mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^n$ et pour toute fonction f admettant une fonction d'inclusion convergente $[f](\cdot)$, deux sous-pavages réguliers encadrant l'ensemble \mathbb{X} peuvent être obtenus tel que:

$$\underline{X} \subset X \subset \bar{X}$$

La figure suivante, montre le principe d'encadrement de l'ensemble solution

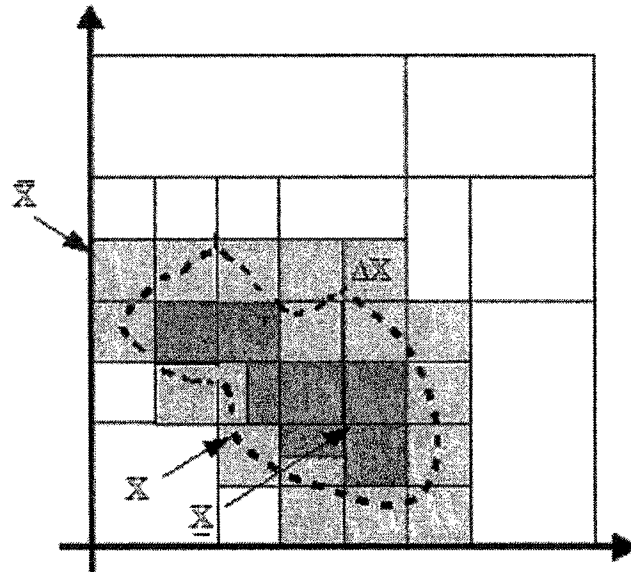


Figure 18 Encadrement de l'ensemble solution par deux sous-pavages

Le pavage initial se trouve partitionné en deux sous-pavages qui correspondent respectivement à l'ensemble des pavés intérieurs qui sont acceptables \underline{X} (gris foncé), des pavés indéterminés ΔX (gris clair) et des pavés inacceptables qui sont éliminés. L'ensemble extérieur contient les pavés acceptables et indéterminés $\bar{X} = \underline{X} \cup \Delta X$ (voir figure 18). Ces sous-pavages vérifient :

$$\underline{X} \subset X \subset \bar{X}$$

Ces deux ensembles peuvent être obtenus par l'algorithme d'inversion ensembliste défini dans le paragraphe suivant.

3.4.8.1 Algorithme d'inversion ensembliste

L'algorithme d'inversion ensembliste par analyse d'intervalle (SIVIA) [5], présenté dans ce paragraphe, s'applique à n'importe quelle fonction f pour laquelle une fonction d'inclusion $[f](.)$ convergente peut être calculée. Le principe de l'algorithme est donné ci-dessous :

L'encadrement de l'ensemble solution \mathbb{X} repose sur les étapes suivantes :

- Définir un pavé initial $[X]$ acceptable a priori sur lequel la recherche sera effectuée.
- Calculer la fonction d'inclusion $[f]([X])$.

Trois situations peuvent apparaître :

- * Si $[f]([X]) \subset Y$ alors $[X] \subset \mathbb{X}$, le pavé est dit *acceptable*.
- * Sinon, si $[f]([X]) \cap Y = \emptyset$, alors $[X] \cap \mathbb{X} = \emptyset$, le pavé est *inacceptable*.
- * Sinon le pavé est dit *indéterminé*, le pavé est bisecté pour une analyse plus fine.

Les situations d'acceptabilité et d'inacceptabilité d'un pavé qu'on vient de décrire dans le principe de l'algorithme sont illustrées par la figure suivante.

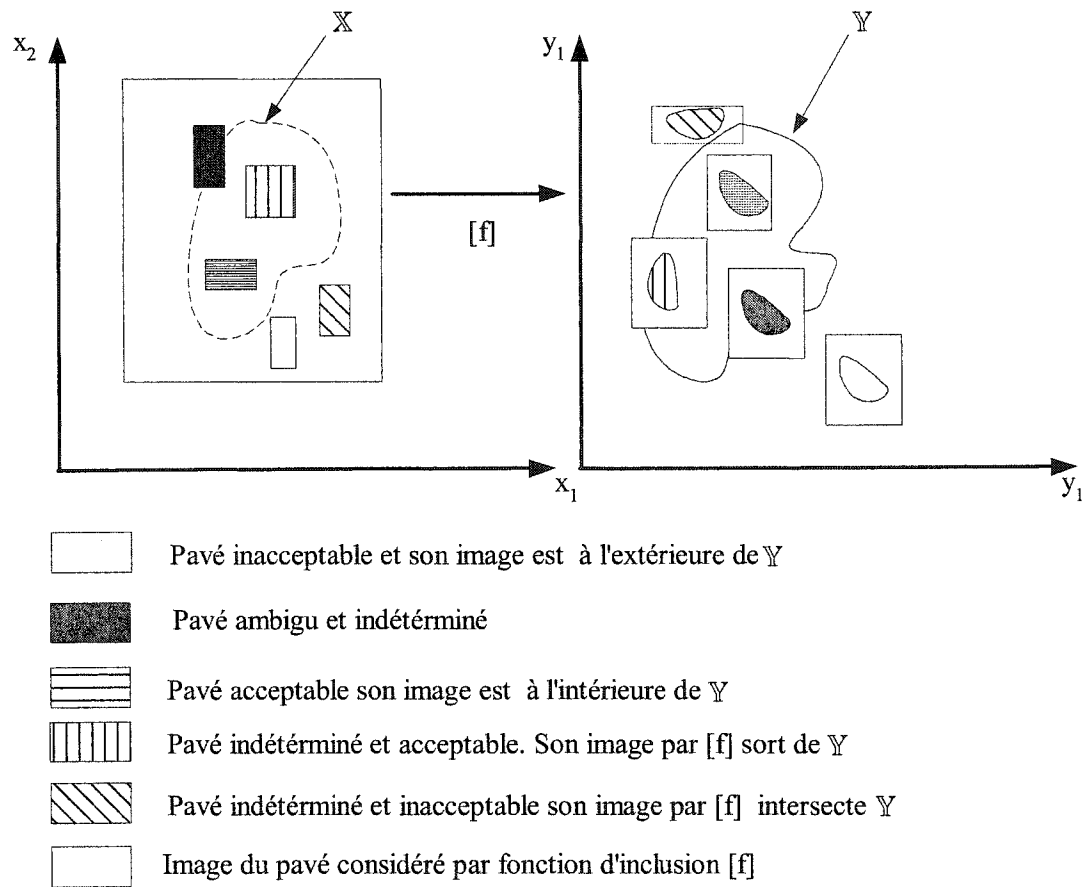


Figure 19 Différentes possibilités d'acceptabilité et d'inacceptabilité d'un pavé

L'algorithme SIVIA met en œuvre de façon récursive le principe d'encadrement par sous-pavages que nous venons de présenter. Il utilise une structure dynamique particulière pour stocker les résultats. La structure utilisée par SIVIA est une pile de pavés. L'algorithme est décrit de la façon suivante :

Algorithme 3.4.1

Entrées :	Fonction d'inclusion	$[f]$
	Ensemble à inverser	$[Y]$
	Pavé de recherche à priori contenant X	$[X]$
	Précision requise pour le pavage	ε

Entrées -Sorties : \underline{X} : Ensemble intérieur contenant les pavés acceptables
 \bar{X} : Ensemble extérieur contenant les pavés acceptables et incertains

Initialisation: $\underline{X} = \phi$, $\bar{X} = \phi$

SIVIA (Entrée : $[f]$, $[Y]$, $[X]$, ε . Entrée-sortie : \underline{X} , \bar{X})

Étape 1 : Si $[f]([X]) \subset [Y]$, alors $\underline{X} = \underline{X} \cup [X]$ et $\bar{X} = \bar{X} \cup [X]$

Étape 2 : Si $[f]([X]) \cap [Y] = \emptyset$, aller à fin,

Étape 3 : Sinon si $w([X]) \leq \varepsilon$ alors $\bar{X} = \bar{X} \cup [X]$ et aller à fin

Sinon Bissecter $[X]$ suivant un plan principale en $[X_g]$, $[X_d]$.

SIVIA (Entrée : $[f]$, $[Y]$, $[X_g]$, ε . Entrée-sortie : \underline{X} , \bar{X});

SIVIA (Entrée : $[f]$, $[Y]$, $[X_d]$, ε . Entrée-sortie : \underline{X} , \bar{X});

Fin.

L'exemple suivant illustre le fonctionnement de l'algorithme SIVIA

Exemple 3.4.3 : Considérons le problème de recherche de l'ensemble de toute les éléments de X qui sont telle que la fonction $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ appartient à l'intervalle $Y = [1, 2]$. Autrement :

$$X = \{x_1, x_2 \mid f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \in [1, 2]\}$$

Si on assume aucune connaissance a priori sur les valeurs de X_1 et X_2 , l'intervalle de recherche initiale sera de $[-99999, 99999]^2$. L'algorithme SIVIA avec une précision de 0.02 permet d'obtenir le résultat illustré par la figure 20 en 27 secondes sur un ordinateur AMD Athlon à 900 MHz. Notons que la mise en œuvre de cet algorithme, et des autres qui seront présentés dans les chapitres suivants, ont été réalisés à l'aide de la bibliothèque Intlab du logiciel Matlab [25].

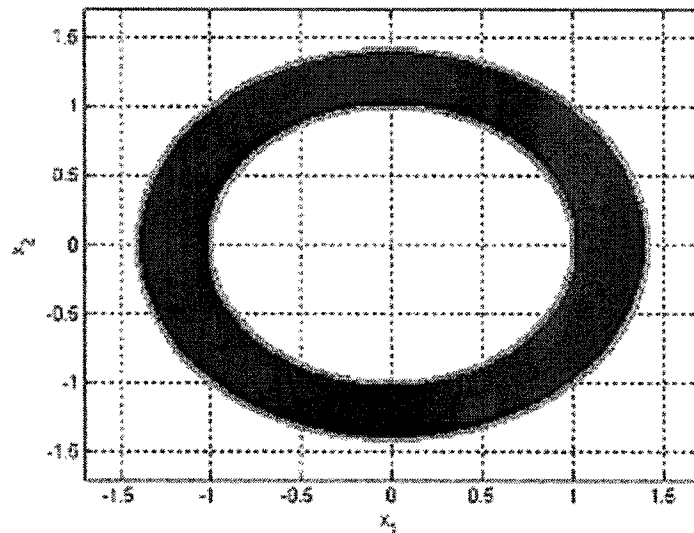


Figure 20 Ensemble solution par l'approximation intérieure (noir) et l'approximation extérieure (gris)

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les notions de base du calcul ensembliste et de l'arithmétique d'intervalle, où les notions de fonction d'inclusion, de pavé, et de sous pavage par bisection ont été rappelées. En se basant sur ces notions, un algorithme d'inversion ensembliste SIVIA a été présenté. Cet algorithme se sert de division d'intervalles ou de pavés en trois sous-pavages qui sont : les pavés acceptables appartenants à l'ensemble solution, les pavés inacceptables telles que leurs intersection avec l'ensemble solution est vide, et les pavés indéterminés pour lesquels aucune conclusion n'est prise et qui seront bisectés (si la largeur des intervalles est toujours à supérieure à la tolérance choisie) pour être examinés de nouveau par l'algorithme. Le processus s'arrête après un nombre fini d'itération. Ainsi l'ensemble solution inconnu se trouve encadré entre deux ensembles intérieure et extérieure connus.

L'avantage d'utiliser cet algorithme est qu'il permet de traiter des problèmes linéaires, non linéaires, convexes ou non convexes de façon globale. Le recours aux techniques à

base d'analyse par intervalle s'avère donc très intéressant pour résoudre des problèmes non linéaires et incertains. Le problème que nous tenterons justement de résoudre avec cette approche et qui fera l'objet du chapitre suivant est celui de l'estimation des paramètres incertains du modèle de frottement de LuGre.

CHAPITRE 4

IDENTIFICATION

4.1 Introduction

Les données recueillies à la sortie d'un procédé sont connues mais souvent incertaines. Ces incertitudes sont dues, soit aux bruits et aux incertitudes de mesure, soit aux variations des paramètres du système dans le temps. De ce fait, il est nécessaire d'effectuer une identification rigoureuse des paramètres qui sera consistante avec les données et leurs incertitudes.

Si nous supposons que l'erreur entre la sortie du système et la sortie du modèle est comprise dans un intervalle acceptable défini a priori, l'approche à erreur bornée nous permettra d'évaluer un ensemble de paramètres qui sera à la fois consistant avec les données et leurs incertitudes. Cette méthode d'estimation des paramètres, basée sur l'analyse d'intervalle, sera présentée dans ce chapitre.

Dans la première partie du chapitre, le principe de l'identification classique est brièvement rappelé. Quant à la seconde partie, elle sera consacrée à l'approche à erreur bornée que nous proposons dans ce mémoire comme alternative pour l'estimation des paramètres incertains du modèle de frottement de LuGre.

4.2 Principe de l'identification

L'identification consiste à rechercher un modèle qui reflète au mieux le comportement du système réel. En automatisation, les modèles identifiés sont élaborés pour des objectifs de commande, de surveillance ou de diagnostic.

Le principe de l'identification repose le plus souvent sur deux étapes : a priori et a posteriori.

4.2.1 Étape a priori

Dans cette étape, la structure du modèle doit être bien choisie en se basant sur les informations disponibles sur le système à identifier. Une acquisition des entrées/sorties du système permet alors l'obtention des données nécessaires à l'estimation des paramètres du modèle et à sa validation. Ces étapes a posteriori sont présentées en détail dans le paragraphe suivant.

4.2.2 Étape a posteriori

Les données recueillies sur le système et sur le modèle serviront pour évaluer le vecteur des paramètres du modèle de sorte que la différence de comportement entre le système et son modèle soit jugée acceptable au sens d'un critère prédéfini. Cette évaluation se fera à l'aide des algorithmes d'identification. Ensuite l'expérimentateur doit prendre une décision quant à la validité ou à l'invalidité du modèle. Cependant, si les résultats de l'estimation contredisent les hypothèses formulés (choix de la structure de modèle, la nature des bruits de mesure où le choix inapproprié de l'algorithme d'identification, incertitude ...etc), le processus d'identification doit alors être entièrement reconsidéré. Ce processus d'identification peut être résumé par une procédure itérative telle que montré par le diagramme de la figure 21 [26].

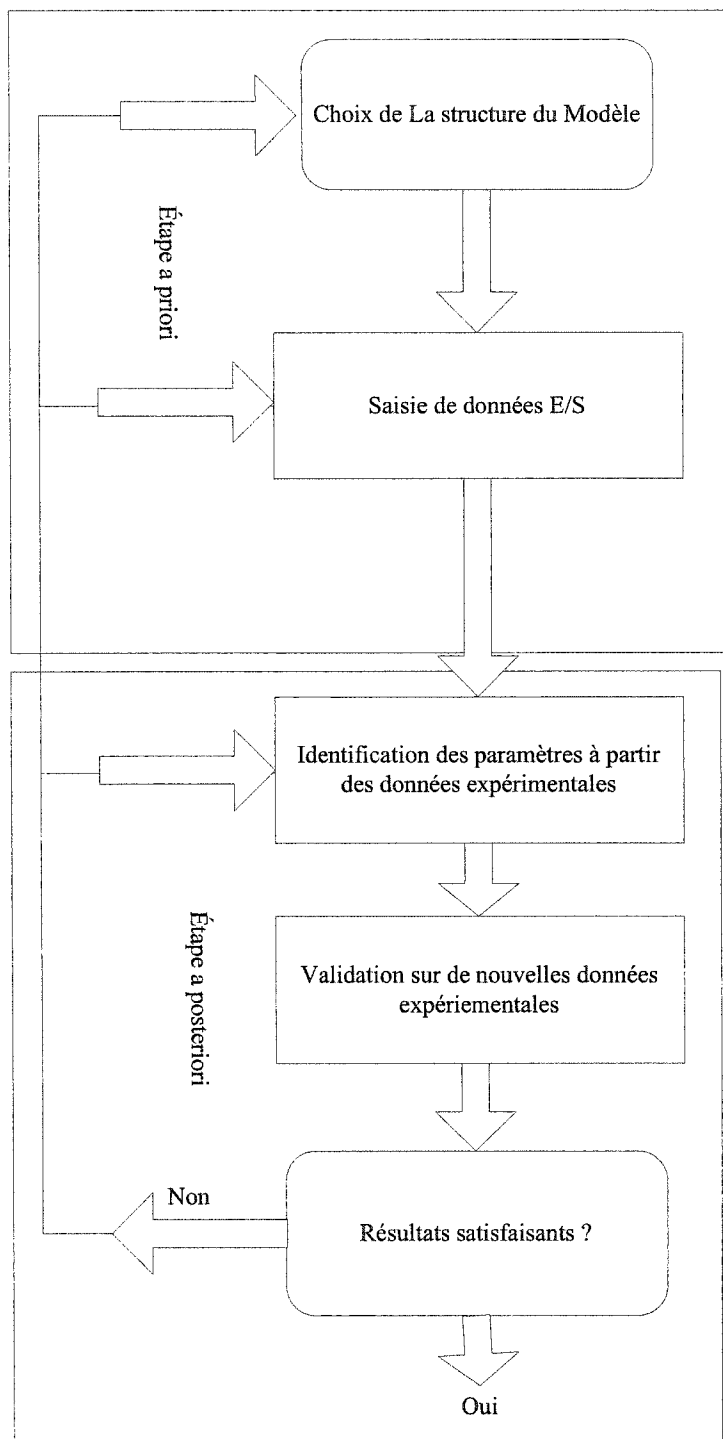


Figure 21 Principe de l'identification

4.3 Estimation paramétrique classique

Tel qu'illustré par la figure 22, le problème d'identification consiste à évaluer le vecteur des paramètres p qui idéalement annule l'erreur $e(p)$ entre la sortie du système Y_M et la sortie du modèle Y .

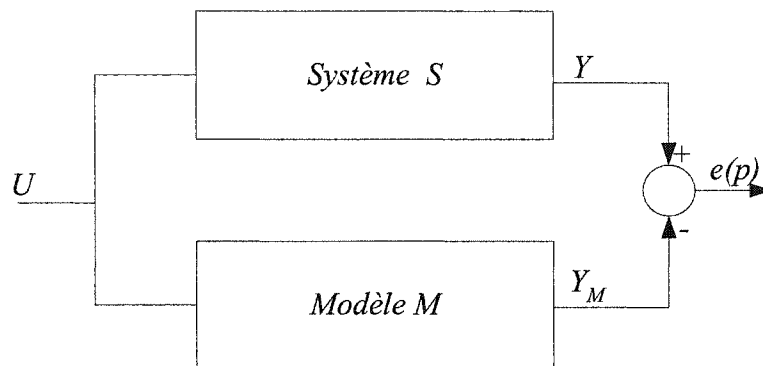


Figure 22 Représentation de l'erreur entre le système et le modèle

Puisque l'erreur $e(p)$ caractérise l'ensemble des erreurs de mesures, de modélisation, ainsi que des erreurs causées par des perturbations et/ou des incertitudes paramétriques, il est pratiquement impossible de l'annuler. Il faut alors définir un critère d'erreur J qui représente la différence entre la sortie du modèle et la sortie du système. Le processus d'estimation consiste alors à déterminer toutes les valeurs de p qui minimisent ce critère. Ils existent plusieurs techniques d'optimisation de la fonction critère. Les techniques locales, telles que celles de Gauss-Newton, de quasi-Newton et du gradient conjugué sont de loin les plus connues [4]. Avec ces méthodes, lorsque le modèle est une fonction nonlinéaire des paramètres, la recherche de l'optimum (estimé des paramètres) dépend du choix de la valeur initiale. Par ailleurs, les techniques globales d'optimisation qui sont basées sur la recherche aléatoire des paramètres tels que les algorithmes génétiques [16], [28] ou le recuit simulé (simulated annealing) [29] contournent le problème du choix de la valeur initiale mais ne garantissent pas forcément la convergence vers l'optimum global en un nombre finis d'itérations. En

revanche, l'approche globale d'estimation à erreurs bornées, basées sur l'analyse d'intervalle, permet d'encadrer l'ensemble de toutes les solutions qui sont jugées acceptables [5], [24]. Cette approche est présentée dans la section suivante.

4.4 Estimation à erreurs bornées

Étant donné p , le vecteur des paramètres à estimer, et y_m le vecteur de mesure à l'instant t , on définit $e(p)$ comme l'erreur entre la sortie mesurée et la sortie du modèle :

$$e(p) = y_m - y(p) \quad (4.1)$$

Si l'erreur $e(p)$ appartient à un vecteur intervalle $E = [\underline{e}, \bar{e}] \subset \mathbb{R}^n$, le vecteur Y doit appartenir au vecteur intervalle

$$[Y_m] = y_m + [E] \quad (4.2)$$

Un estimé \hat{p} du vecteur des paramètres p est dit acceptable si, et seulement si, $y(\hat{p}) \in [Y_m]$. L'estimation à erreurs bornées consiste à rechercher un ensemble \mathbb{S} de tous les estimés \hat{p} acceptable appartenant à un vecteur d'intervalle $[P]$ connu a priori :

$$\mathbb{S} = \{p \in [P] \mid y(p) \in [Y_m]\} \quad (4.3)$$

L'équation (4.3) peut s'écrire sous forme d'inversion ensembliste comme suit :

$$\mathbb{S} = y^{-1}([Y_m]) \cap [P] \quad (4.4)$$

Le problème d'estimation de paramètres à erreurs bornées peut donc être considéré comme un problème d'inversion ensembliste : évaluer l'image réciproque de $[Y_m]$ par la fonction y . L'algorithme d'inversion ensembliste (SIVIA), présenté dans le chapitre précédent, peut être utilisé pour calculer cet ensemble.

Le paragraphe suivant présente comment la méthode d'estimation de paramètres à erreurs bornées peut être appliquée lorsque l'entrée et la sortie du système sont liées par une équation différentielle ordinaire.

4.5 Encadrement de la solution d'une équation différentielle

La majorité des systèmes physiques peuvent être modélisés à l'aide d'équations différentielles ordinaires (EDO). Souvent, les paramètres et/ou les conditions initiales du modèle ne sont pas connus avec certitude. Ces incertitudes peuvent être représentées par des intervalles. La solution analytique de telles EDO est en générale très difficile, voire impossible, à déterminer. D'autre part, même avec les méthodes d'intégrations numériques telles que celle d'Euler, Taylor et Runge–Kutta [27] approximant la solution de l'EDO produisent souvent des solutions erronées lorsque les conditions initiales et/ou les paramètres sont incertains. En revanche, les techniques basées sur l'analyse par intervalle permettent de trouver une famille de solution sous forme d'intervalle [30], [31]. Cet ensemble solution sera consistant avec les mesures et ses incertitudes.

4.5.1 Estimation paramétrique pour des modèles sous forme d' EDO

Une équation différentielle ordinaire paramétrique peut toujours s'écrire sous la forme d'état suivante :

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= f(t, x(t), u, p) \\
y &= g(x(t), p) \\
x(t_0) &= x_0
\end{aligned} \tag{4.5}$$

où x représente le vecteur d'état du modèle, u est l'entrée d'excitation, y est la sortie et p est le vecteur des paramètres du modèle.

Le théorème suivant [32] sera très utile pour trouver les bornes inférieures et supérieures de la solution d'une EDO paramétrique. Cependant, pour rendre l'écriture plus compacte et plus facile, on définit d'abord les intervalles $\mathcal{I} = [0 \quad T]$ et $\mathcal{I}_0 = (0 \quad T]$ où $T > 0$ ainsi que \mathcal{C} , l'ensemble de toutes les fonctions $x: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continues sur \mathcal{I} et différentiable sur \mathcal{I}_0 . On définit également $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ et $x_{k^-} = (x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)^T$ de façon à poser l'équivalence de notation suivante $f(x, t) = f(t, x_k, x_{k^-})$. Le théorème est alors énoncé comme suit :

Théorème 4.1 [32] Soit f une fonction continue telle que l'EDO (4.5) satisfait l'unicité de la solution sur $\mathcal{I} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times [\underline{p} \quad \bar{p}]$. Si $\underline{x}(t), \bar{x}(t) \in \mathcal{C}$ satisfont les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\underline{x}(0) &\leq x_0 \left([\underline{p} \quad \bar{p}] \right) \leq \bar{x}(0) \\
\dot{\underline{x}}_k(t) &\leq f_k \left(t, \underline{x}_k(t), [\underline{x}_{k^-}(t) \quad \bar{x}_{k^-}(t)], [\underline{p} \quad \bar{p}] \right) \\
\dot{\bar{x}}_k(t) &\geq f_k \left(t, \bar{x}_k(t), [\underline{x}_{k^-}(t) \quad \bar{x}_{k^-}(t)], [\underline{p} \quad \bar{p}] \right) \\
\forall t \in \mathcal{I}_0 \text{ et } k &= 1, 2, \dots, n
\end{aligned}$$

Alors $\underline{x}(t)$ et $\bar{x}(t)$ sont respectivement les bornes inférieure et supérieure de l'ensemble de toutes les solutions de l'EDO (4.5).

Du théorème 4.1 découle les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}_k(t) &= \inf f_k\left(t, \underline{x}_k(t), [\underline{x}_{k-}(t) \quad \bar{x}_{k-}(t)], [\underline{p} \quad \bar{p}]\right) \\ \dot{\bar{x}}_k(t) &= \sup f_k\left(t, \bar{x}_k(t), [\underline{x}_{k-}(t) \quad \bar{x}_{k-}(t)], [\underline{p} \quad \bar{p}]\right) \\ \forall t \in \mathcal{I}_o \text{ et } k &= 1, 2, \dots, n\end{aligned}\quad (4.6)$$

et

$$\begin{aligned}\underline{x}(0) &= \inf x_0([\underline{p} \quad \bar{p}]) \\ \bar{x}(0) &= \sup x_0([\underline{p} \quad \bar{p}])\end{aligned}\quad (4.7)$$

La démonstration du théorème 4.1 se trouve en annexe 2.

La combinaison du théorème 4.1 avec l'algorithme SIVIA, nous permet de formuler l'algorithme suivant pour l'estimation paramétrique des modèles qui sont régis par des équations différentielles ordinaires. L'algorithme est donné ci-dessous :

Algorithme 4.1

Entrées : Sortie mesurée et son incertitude (Ensemble à inverser) :	$[Y_m]$
Fonctions d'état et la fonction de sortie du modèle	f, g
Vecteur intervalle d'état initial	$[x](0)$
Intervalle de recherche des paramètres à priori contenant \mathbb{S} :	$[P]$
Précision requise pour le pavage :	ε
Entrées –Sorties : $\underline{\mathbb{S}}$: Ensemble intérieur contenant les pavés acceptables	
$\bar{\mathbb{S}}$: Ensemble extérieur contenant les pavés acceptables et incertains	

Initialisation : $\underline{\mathbb{S}} = \emptyset, \bar{\mathbb{S}} = \emptyset,$

SIVIAODE (Entrée : $[Y_m], f, g, [x](0), [P], \varepsilon$, **Entrée Sortie :** $\underline{\mathbb{S}}, \bar{\mathbb{S}})$

Étape 1 : - Écrire l'inf et le sup de f selon le théorème (3.5.1.2)

Obtenir les bornes inférieures \underline{x} et supérieures \bar{x} des solutions par l'intégration de $\inf(f)$ et $\sup(f)$ avec une méthode numérique appropriée.

Étape 2 : Si $[g]([P], [x]) \subset [Y_m]$, alors $\underline{\mathbb{S}} = \underline{\mathbb{S}} \cup [P]$, et $\bar{\mathbb{S}} = \bar{\mathbb{S}} \cup [P]$

Étape 3 : Sinon si $[g]([P], [x]) \cap [Y_m] = \emptyset$, aller à fin

Étape 4 : Sinon si $W([P]) \leq \varepsilon$, alors $\bar{\mathbb{S}} = \bar{\mathbb{S}} \cup [P]$, aller à fin

Étape 5 : Sinon bissecter $[P]$ suivant un plan principale en $[P_G]$, et $[P_D]$

SIVIAODE (Entrée : $[Y_m], f, g, [x](0), [P_G], \varepsilon$, **Entrée Sortie :** $\underline{\mathbb{S}}, \bar{\mathbb{S}})$

SIVIAODE (Entrée : $[Y_m], f, g, [x](0), [P_D], \varepsilon$, **Entrée Sortie :** $\underline{\mathbb{S}}, \bar{\mathbb{S}})$

Fin.

L'exemple suivant illustre le fonctionnement de l'algorithme 4.1.

Exemple 4.5.1 : Lotka-Volterra

Le modèle de Lotka-Volterra est un système d'équations différentielles nonlinéaires. Le système est donné par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (1 - p_1 x_2) x_1 \\ \dot{x}_2 &= (-1 + p_2 x_1) x_2 \\ y &= x_1(t) \end{aligned} \tag{4.8}$$

Supposons que la sortie mesurée est obtenue pour des valeurs $p_1 = 0.01$, $p_2 = 0.002$ et pour des valeurs initiales $x_1(0) = x_2(0) = 50$. Si nous assumons que l'erreur maximale

tolérée sur la mesure est de 5% ($e(p)=0.05 |y_m|$), la sortie mesurée appartient alors à l'intervalle $[y_m - e, y_m + e]$. Le but est donc de trouver l'ensemble de tous paramètres acceptables de sorte que la solution du système décrit par (4.8) soit toujours dans l'intervalle $[y_m - e, y_m + e]$ (les barres de la figure 23 illustrent ces intervalles). Pour ce faire on applique l'algorithme défini dans la section précédente.

Si nous définissons un intervalle des paramètres de recherche a priori $P=[0.0001, 0.1]^2$, l'algorithme génère, pour une précision de $\varepsilon=10^{-4}$, l'ensemble des solutions des paramètres compatibles avec les états prédits et avec les mesures. Le résultat est illustré par la figure 24.

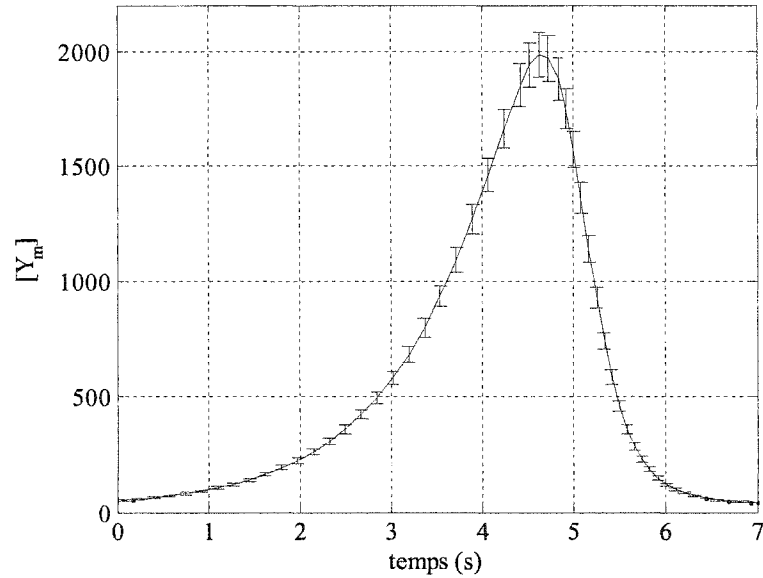


Figure 23 Erreur centrale de 5% sur la sortie mesurée

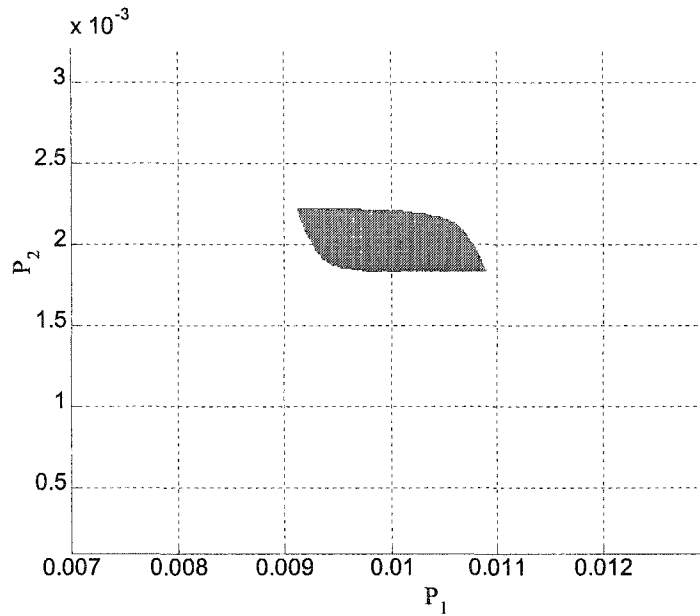


Figure 24 Ensemble des paramètres cohérent avec les états prédits et les mesures

L'ensemble des paramètres (solution) qui respecte les hypothèses (erreur de 5%) formulées dans l'énoncé se trouve encadré. Le minimum et le maximum de cette ensemble sont respectivement $8e^{-3}$ et $11.9e^{-3}$ pour le paramètre p_1 et $1.75e^{-3}$ et $2.25e^{-3}$ pour p_2 ; autrement dit $p_1 \in [8e^{-3}, 11.9e^{-3}]$ et $p_2 \in [1.75e^{-3}, 2.25e^{-3}]$.

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une approche d'identification de paramètres basée sur l'analyse d'intervalle et l'inversion ensembliste. Nous avons vu les avantages qu'elle peut avoir par rapport aux approches classiques lorsque les paramètres des modèles à identifier sont incertains et/ou lorsque les modèles sont non linéaires par rapport à leurs paramètres. Malgré que cette approche soit relativement complexe, elle permet de résoudre de façon globale des problèmes d'identification de système à paramètres incertains.

L'identification des paramètres du modèle de frottement de LuGre à l'aide de cette technique s'avère très appropriée puisque, d'une part, le modèle est non linéaire par rapport à ces paramètres qui sont incertains, et d'autre part, les mesures expérimentales du frottement comportent également des incertitudes. Le chapitre suivant est donc consacré à l'identification des paramètres du modèle de LuGre à partir de données expérimentales provenant d'un système électropneumatique.

CHAPITRE 5

ESTIMATION DES PARAMÈTRES DU MODÈLE DE FROTTEMENT

5.1 Introduction

Ce chapitre concerne l'estimation des paramètres du modèle de LuGre par l'approche de l'estimation à erreur bornée basée sur l'analyse d'intervalle que nous avons présentée dans le chapitre précédent. Les mesures expérimentales sont récoltées d'un système électropneumatique comprenant un actionneur qui comporte un important frottement causé par un joint d'étanchéité.

Le chapitre est organisé comme suit : dans la première partie une description succincte du système électropneumatique est donnée en portant une attention particulière à la partie mécanique qui est sujet au frottement. La procédure et les étapes d'identification sont présentées dans la deuxième partie ainsi que les résultats obtenus. Nous terminons le chapitre par une conclusion et une interprétation des résultats obtenus.

5.2 Description du système électropneumatique

Le système électropneumatique, illustré par la figure 25, est composé essentiellement des éléments de base suivants :

- une alimentation en air comprimé;
- un régulateur et un filtre LFR-M2-G1/4-C10RG) de la compagnie FESTO;
- une servovalve MPYE-5-1/8LF-010B de la compagnie FESTO;
- un ordinateur muni d'une carte d'acquisition PCI-6052E de la compagnie National Instruments;
- un encodeur incrémentale linéaire MSA373.55-2P de la compagnie RSF Elektronik;

- un cylindre pneumatique : DGP-25-500 de la compagnie FESTO;
- deux capteurs de pression SDE-10 de la compagnie FESTO.

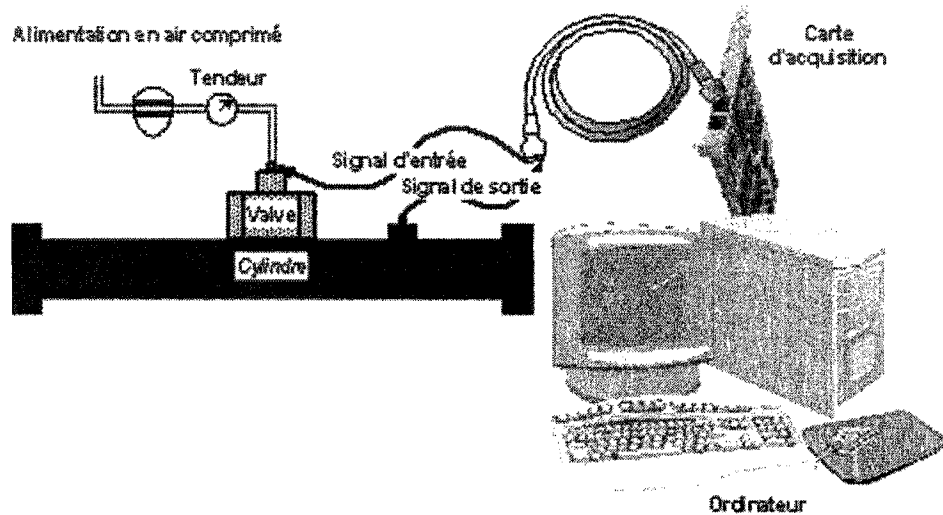


Figure 25 Dispositif expérimental : système électropneumatique

Notons que le système décrit ci haut à été réalisé dans le cadre d'un autre projet visant entre autre à commander la force appliquée sur la partie mobile du vérin pneumatique. Le système de commande de force réalisé dans cet autre projet est une commande linéarisante suivi d'une commande robuste [33]. Ce contrôleur de force nous a donc servi à récolter les données nécessaires à l'identification du frottement de la partie mobile du système électropneumatique. Les résultats présentés dans ce chapitre ont également fait l'objet d'une communication [34].

5.3 Modélisation de la partie mécanique

Le déplacement de la partie mobile de l'actionneur, en l'occurrence le piston de masse m , est modélisé par l'équation différentielle suivante :

$$m\ddot{x} + F_f = u \quad (5.1)$$

où x représente la position du piston, u est la force appliqué déduite de la différence de pression dans les chambres du cylindre et F_f est la force de frottement causé par le joint d'étanchéité de l'actionneur pneumatique. Ce système peut-être représenté par la figure 26.

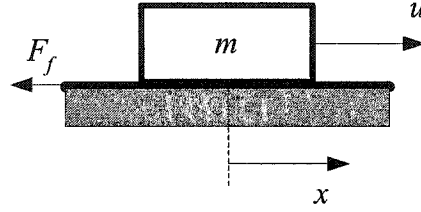


Figure 26 Modélisation du déplacement du piston

La force F_f causée par le frottement entre le joint d'étanchéité fixé sur le piston et le cylindre de l'actionneur est caractérisé par le modèle de LuGre donné par les relations (2.11) et (2.13) du chapitre 2. L'équation (5.1) peut être réécrite sous la forme générale du système d'équation différentielle (4.5) du chapitre précédent. En effet, si $x_1 = x$, $x_2 = v$ et $x_3 = z$ sont respectivement la position et la vitesse de déplacement du piston ainsi que la variable interne du modèle de frottement, l'équation (5.1) peut s'écrire sous la forme d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_x(v) = v \\ \dot{x}_2 = \begin{cases} f_{v_1}(v, x_3, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \phi) & \text{if } v \geq 0 \\ f_{v_2}(v, x_3, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \phi) & \text{if } v < 0 \end{cases} \\ \dot{x}_3 = \begin{cases} f_{z_1}(v, x_3, \sigma_0, \phi) & \text{if } v \geq 0 \\ f_{z_2}(v, x_3, \sigma_0, \phi) & \text{if } v < 0 \end{cases} \\ F_f = g(x, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2) = \sigma_0 x_3 + \sigma_1 \dot{x}_3 + \sigma_2 v \end{cases} \quad (5.2)$$

où

$$\begin{aligned} f_{v_1}(v, x_3, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \phi) &= \frac{1}{m} (u - \sigma_0 x_3 - (\sigma_1 + \sigma_2)v + \sigma_0 \sigma_1 v x_3 \phi) \\ f_{v_2}(v, x_3, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \phi) &= \frac{1}{m} (u - \sigma_0 x_3 - (\sigma_1 + \sigma_2)v - \sigma_0 \sigma_1 v x_3 \phi) \end{aligned} \quad (5.3)$$

et

$$\begin{aligned} f_{z_1}(v, x_3, \sigma_0, \phi) &= v(1 - \sigma_0 x_3 \phi) \\ f_{z_2}(v, x_3, \sigma_0, \phi) &= v(1 + \sigma_0 x_3 \phi) \end{aligned} \quad (5.4)$$

avec

$$\begin{aligned} \phi(F_c, F_s, \theta) &= \frac{1}{F_c + (F_s - F_c)\theta} \\ \text{et} \\ \theta(v_s, v) &= e^{-\left(\frac{v}{v_s}\right)^2} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Le modèle d'état formé par le système d'équation différentielle (5.2) se trouve sous la forme générale donnée par l'équation (4.5). De plus, plusieurs fonctions associées à ce modèle d'état se présentent sous une forme multilinéaire par rapport aux arguments suivante : $(x_1, x_2, x_3, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \phi)$. De surcroît, ϕ est l'inverse d'une fonction multilinéaire par rapport à (F_c, F_s, θ) . Grâce à cet agencement de fonctions et au lemme des fonctions multilinéaires [35], présenté dans le paragraphe suivant, les intervalles qui bornent la solution de l'équation différentielle sont considérablement réduits. Cette particularité nous permet d'obtenir une convergence plus rapide de l'algorithme d'estimation des paramètres.

5.3.1 Fonction multilinéaire

Une fonction $f: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^p$ est dite multilinéaire si pour $i=1, \dots, n$, $f(q)$ est linéaire par rapport à q_i en considérant les variables $q_1, q_2, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_n$ comme des constantes.

Lemme [35] Soit $f(q)$ une fonction multilinéaire où q est un vecteur. Si $Q = \{q \mid q_i \in [\underline{q}_i, \bar{q}_i]\}$ est un hyper-rectangle et que U est l'ensemble des extrémités de Q alors :

$$\inf_{q \in Q} f(q) = \min_{q \in U} f(q) \quad (5.6)$$

$$q \in Q \quad q \in U$$

et

$$\sup_{q \in Q} f(q) = \max_{q \in U} f(q) \quad (5.7)$$

$$q \in Q \quad q \in U$$

L'algorithme 4.1 que nous avons présenté dans le chapitre précédent peut alors s'appliquer de façon plus efficace puisque la relation (5.2) se présente sous une forme multilinéaire. Dans la section suivante, la procédure d'identification des paramètres du modèle de LuGre est présentée.

5.4 Stratégie d'identification

Nous avons d'abord tenté d'identifier les 6 paramètres du modèle de LuGre à l'aide de la méthode SIVIA modifiée présentée au chapitre 4. Malheureusement, l'estimation des bornes inférieures et supérieures de la solution de l'équation différentielle du modèle de LuGre nécessitait la résolution numérique d'équations différentielles qui pouvaient être

instable par moment. Ces instabilités provoquaient la non convergence de l'algorithme. Pour cette raison, l'identification a été réalisée en trois étapes : D'abord, on estime les coefficients de frottement statique F_s et de Coulomb F_c uniquement par des observations des données expérimentales. Ensuite, dans la deuxième étape, l'algorithme (4.1) que nous avons présenté dans le chapitre précédent est appliqué en préglissement (déplacement microscopique) où le coefficient de rigidité σ_0 ainsi que la somme du coefficient d'amortissement σ_1 et du coefficient du frottement visqueux σ_2 sont considérés comme les paramètres à estimer. Finalement, puisque le coefficient d'amortissement σ_1 peut dépendre de la vitesse [9], une troisième étape, aux vitesses plus élevées (glissement) a été effectuée. Ceci nous permet de trouver d'une part toute la plage de variation du paramètre σ_1 et d'autre part, l'intervalle de variation du coefficient du frottement visqueux σ_2 . En effet, l'influence du frottement visqueux n'apparaît qu'à grande vitesse. Dans la section suivante, les résultats obtenus à chaque étape sont présentés en détail.

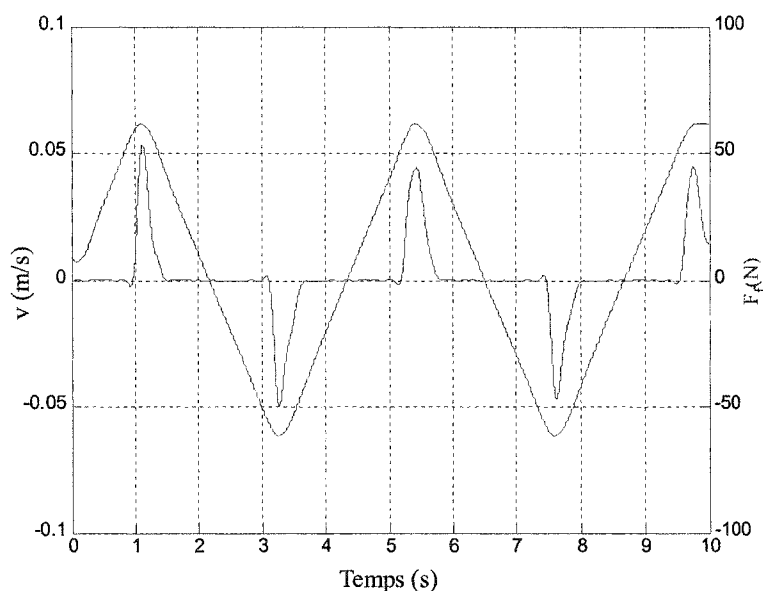


Figure 27 Force appliquée sur le piston du système pneumatique

5.4.1 Identification des paramètres statiques

Pour déterminer les intervalles des paramètres statiques tels que le coefficient de frottement statique F_s et de Coulomb F_c , on applique une force triangulaire illustrée par la figure 27. Cette force croît et décroît lentement jusqu'à atteindre la force de décrochage. Plusieurs tests à différentes positions initiales du piston ont été effectués. Suite à ces tests nous avons établi un intervalle de variation de [50 55] pour le paramètre de frottement statique et de [30 38] pour le paramètre de frottement de Coulomb.

5.4.2 Estimation en préglissement

L'influence du frottement en régime de préglissement est caractérisée par les paramètres dynamiques qui sont représentés dans le modèle de LuGre par σ_0 , σ_1 et σ_2 . Plusieurs simulations ont permis de constater que le modèle de LuGre linéarisé se comporte de façon très similaire à son modèle non linéaire lorsque le système est en régime de préglissement. La figure 28 en page 72 illustre la similitude des vitesses obtenues du modèle non linéaire et du modèle linéarisé pour l'ensemble de paramètres suivants : $\sigma_0 = 5 \text{ e}^5 \text{ N/m}$ et $\sigma_1 + \sigma_2 = 5 \text{ e}^5 + 1 \text{ e}^2 \text{ Ns/m}$, $F_s = 53 \text{ N}$ et $F_c = 35 \text{ N}$ et $v_s = 0.01 \text{ m/s}$. La procédure d'estimation des paramètres a donc été simplifiée en considérant le modèle de LuGre linéarisé suivant [13] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{x}_3 = v \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{m}(u - g) \\ F_f = g(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, x_1, v) = \sigma_0 x_1 + (\sigma_1 + \sigma_2)v \end{cases} \quad (5.8)$$

Dans ce modèle, les deux paramètres à identifier sont le coefficient de rigidité σ_0 ainsi que la somme du coefficient d'amortissement σ_1 et du coefficient du frottement visqueux σ_2 . Plusieurs essais d'identification nous ont alors permis de réaliser que la condition initiale de la variable interne z n'est pas nécessairement nulle. Comme nous ne pouvons mesurer cette état initial interne, nous l'avons considéré comme étant un paramètre supplémentaire incertain à identifier. Dès lors, l'ensemble des paramètres estimés $p = [\sigma_0, \sigma_1 + \sigma_2, z_0]$ fut consistant avec les données expérimentales : la force de frottement donnée par le modèle de l'équation (5.8) évalué pour l'ensemble de paramètres, est toujours à l'intérieur du gabarit de la force de frottement mesurée et son incertitude (*voir* figure 29). L'espace de recherche initial respectivement pour σ_0 , $\sigma_1 + \sigma_2$ et z_0 est $[\mathbf{P}] = [1 \times 10^3 \ 2 \times 10^6] \times [1 \times 10^3 \ 2 \times 10^6] \times [-1 \times 10^{-4} \ 1 \times 10^{-4}]$. La figure 30 représente la projection dans le plan des paramètres $(\sigma_0, \sigma_1 + \sigma_2)$ de l'ensemble des paramètres estimés par l'algorithme, en 34.6267 minutes sur un ordinateur AMD 900 MHz pour une précision (tolérance) $\varepsilon = 0.0005$. Les estimés de ces paramètres et leurs incertitudes sont résumé dans le tableau I.

900 MHz pour une précision (tolérance) $\varepsilon=0.0005$. Les estimés de ces paramètres et leurs incertitudes sont résumés dans le tableau I.

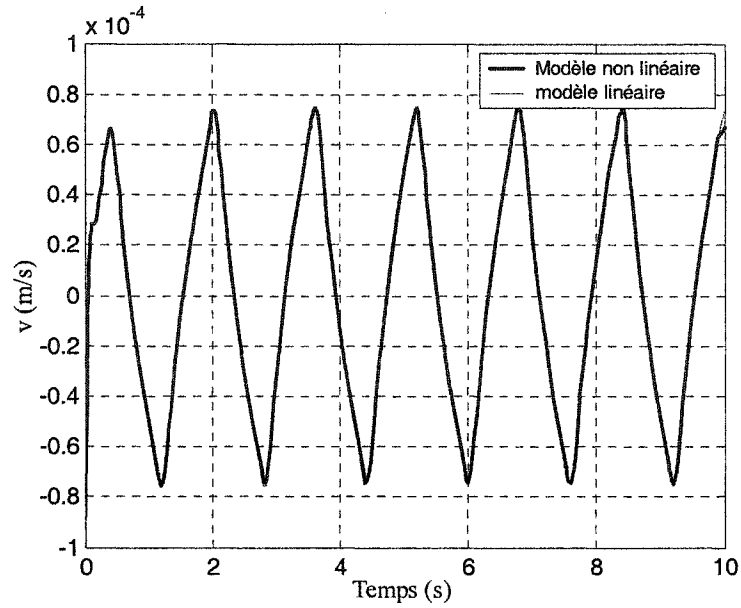


Figure 28 Vitesses avec le modèle simplifié vs non simplifié du modèle de LuGre

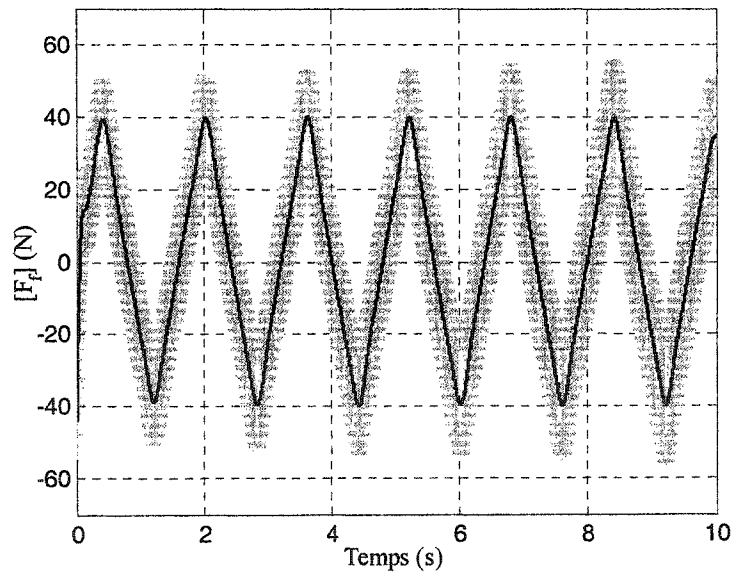


Figure 29 Force de frottement et son incertitude

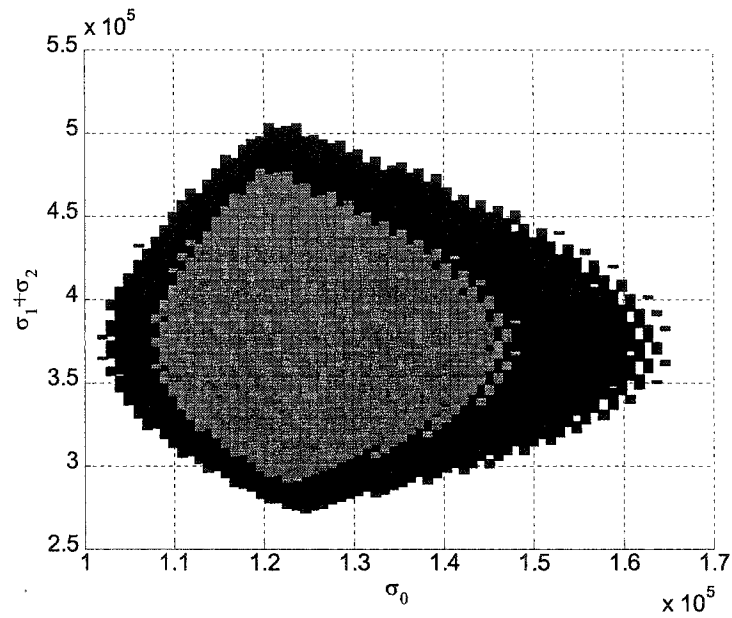


Figure 30 Approximation intérieure (\underline{S} en blanc) et extérieure (\bar{S} en noir) de l'ensemble des paramètres estimés pour σ_0 et $\sigma_1 + \sigma_2$ dans l'espace de recherche initial $[\mathbf{P}] = [1 \times 10^3 \ 2 \times 10^6] \times [1 \times 10^3 \ 2 \times 10^6] \times [-1 \times 10^{-4} \ 1 \times 10^{-4}]$, $\varepsilon = 0.0005$

Si on trace cette courbe dans le plan d'espace de recherche initial on obtient la figure suivante :

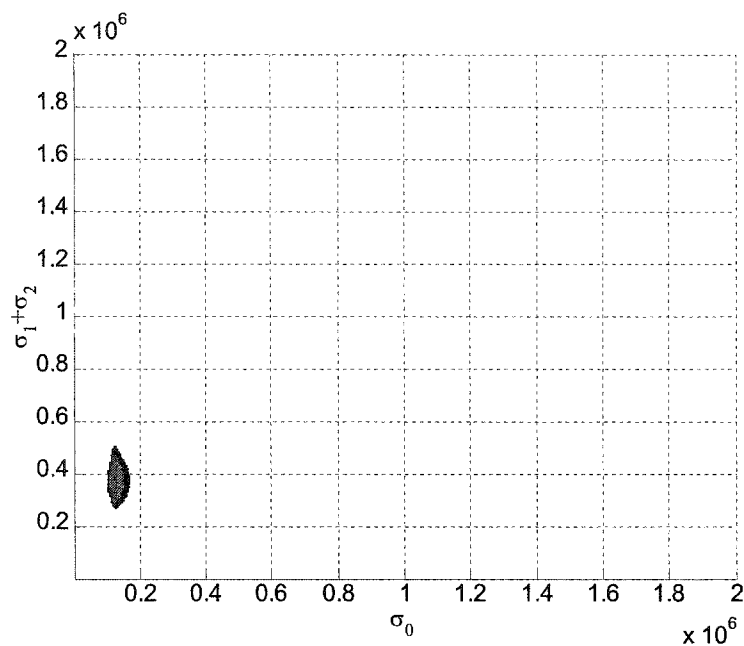


Figure 31 Encadrement intérieure et extérieure de l'ensemble solution obtenu dans l'espace de recherche
 $\text{initial}[\mathbf{P}] = [1 \times 10^3 \ 2 \times 10^6] \times [1 \times 10^3 \ 2 \times 10^6] \times [-1 \times 10^{-4} \ 1 \times 10^{-4}], \varepsilon = 0.0005$

Tableau I

Estimés des paramètres dynamiques obtenues en préglissement

Paramètres	Espace de recherche $[P_0]$	Estimés $[\hat{P}]$
σ_0	$[1e^3 \ 2e6]$	$[1.0159 \ e^5 \ 1.6506 \ e^5]$
$\sigma_1 + \sigma_2$	$[1e^3; \ 2e6]$	$[2.7248 \ e^5 \ 5.0588 \ e^5]$
z_0	$[-1e^{-4}; \ 1e^{-4}]$	$[-6.9043e^{-5} \ -6.5234e^{-5}]$

5.4.3 Estimation en glissement

Dans cette étape, nous avons obtenus l'encadrement du coefficient d'amortissement σ_1 et du coefficient du frottement visqueux σ_2 . Comme nous l'avons signalé auparavant, le coefficient d'amortissement décroît avec la vitesse. Par conséquent, cette étape s'avère nécessaire d'une part pour tenir compte de toute la plage de variation de ce dernier et d'autre part pour estimer l'incertitude du coefficient de frottement visqueux, puisque ce dernier est presque négligeable devant le coefficient d'amortissement en préglissement. Par conséquent, il est difficile de connaître sa plage de variation dans ce régime.

Pour ce faire, les estimés obtenus dans les étapes précédentes tels que le coefficient de rigidité (raideur) ainsi que les coefficients de frottement statique sont utilisés. Ceci nous évite un temps d'estimation extrêmement long. Dans cette étape, la méthode d'estimation ne diffère pas significativement de la précédente (préglissement). Par contre, l'application d'une force largement supérieure (en amplitude) permet de mieux caractériser le frottement visqueux. Les vitesses sont alors importantes de sorte que le modèle linéarisé ne peut plus être considéré. Le modèle de frottement considéré est donc celui donnée par l'équation (5.2). Pour simplifier une fois de plus la procédure d'estimation de façon à réduire les temps de calcul, le paramètre de vitesse de Stribeck v_s a été considéré dans l'intervalle d'incertitude : $[0.001 \ 0.1]$. En fait, nous avons constaté que l'incertitude de ce paramètre affecte peu l'estimation des paramètres $p = [\sigma_1 \ \sigma_2]$. Nous ne l'avons donc pas introduit dans la liste des paramètres à estimer.

L'ensemble des paramètres estimés $p = [\sigma_1 \ \sigma_2]$ obtenus est telle que la force de frottement évaluée par le modèle est consistante avec les mesures expérimentales du frottement et ses incertitudes. L'allure de cette force et son incertitude sont données par la figure 32. L'espace de recherche initial respectivement pour σ_1 et σ_2 est

$[\mathbf{P}] = \begin{bmatrix} 0 & 4.5 \times 10^3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 2 \times 10^3 \end{bmatrix}$. La figure 33 représente les pavés intérieurs et extérieurs (définis à la page 46) projetés dans l'espace des paramètres σ_1 et σ_2 . Ces pavés ont été obtenus en 62 minutes sur un ordinateur AMD 900 MHz pour une tolérance $\varepsilon=0.005$. Les intervalles d'incertitudes maximales obtenus pour ces paramètres sont résumés dans le tableau II.

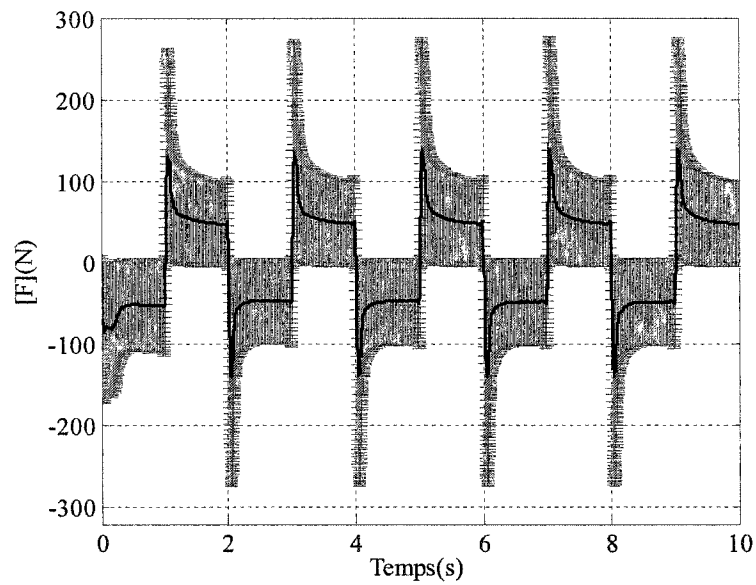


Figure 32 La force de frottement expérimentale et son incertitude

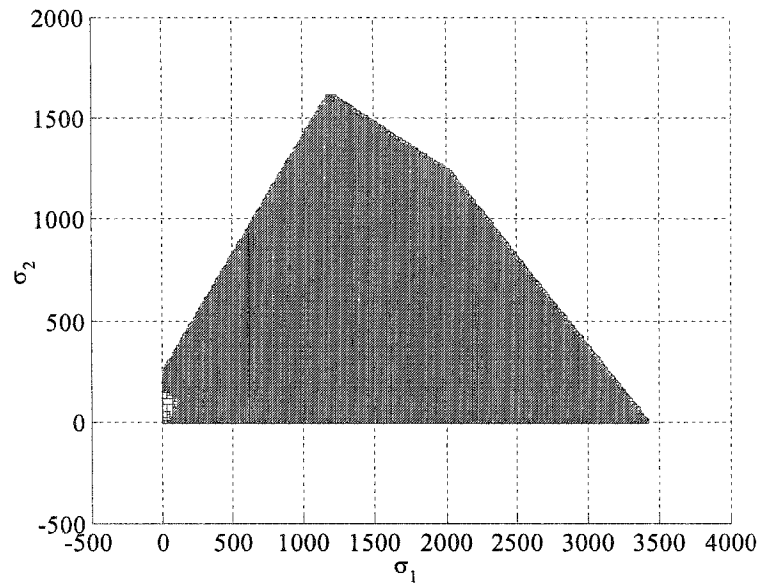


Figure 33 Encadrement intérieur \underline{S} (blanc) et extérieur \bar{S} (noir) obtenus pour l'ensemble des paramètres de σ_1 et σ_2 dans l'espace de recherche initial $[P] = [0 \ 4.5 \times 10^3] \times [0 \ 2 \times 10^3]$ pour $\varepsilon = 0.005$

Tableau II

Estimés des paramètres σ_1 et σ_2 obtenues en glissement

Paramètres	Espace de recherche $[P_0]$	Estimés $[\hat{P}]$
σ_1	$[0; 4500]$	$[0; 3418.89]$
σ_2	$[0; 2000]$	$0; 1161.72]$

Comme le montre le tableau II, l'incertitude sur ces paramètres est très significative. Elle est due à l'incertitude prise sur la valeur expérimentale du frottement illustrée par la Figure 32. Par contre, si on observe l'encadrement intérieur \underline{S} de l'ensemble S , les intervalles maximaux de variation des paramètres sont donnés dans le tableau III. La figure 34 représente la projection de l'ensemble \underline{S} dans l'espace des paramètres puisque

ce dernier n'est pratiquement pas visible sur la figure 33. Notons que ce grand écart qui existe entre l'ensemble intérieur $\underline{\mathbb{S}}$ et l'ensemble extérieur $\overline{\mathbb{S}}$ peut être réduit considérablement en augmentant le nombre de bisection (i.e en choisissant une tolérance ε aussi petite que possible). L'inconvénient est alors une augmentation considérable du temps de calcul. Malgré la différence importante entre les approximations intérieures et extérieures, il n'en demeure pas moins que les intervalles de l'approximation intérieure sont relativement grands. On constate en particulier que l'ensemble des intervalles ont une borne inférieure nulle. Cette particularité est causée par le choix du gabarit d'incertitude de l'erreur d'estimation illustré par la figure 32. Le choix d'un gabarit plus restreint assurerait normalement une estimation plus fine des intervalles des paramètres. Malheureusement, la réduction du gabarit entraîne un ensemble nul comme solution au problème d'identification. Ce qui peut être expliqué par une correspondance inexacte entre le modèle de LuGre et le frottement expérimental du banc d'essais. Cette disparité peut s'expliquer par la nature complexe du joint d'étanchéité du vérin pneumatique qui cause le frottement. Ce joint de caoutchouc peut en effet se déformer sous l'effet des forces impliquées dans le système.

Tableau III

Intervalle de variation des paramètres dans l'approximation intérieure $\underline{\mathbb{S}}$

Paramètres	Espace de recherche $[P_0]$	Estimés $[\hat{P}]$
σ_1	$[0; 4500]$	$[0 ; 140.625]$
σ_2	$[0; 2000]$	$[0 ; 183.5968]$

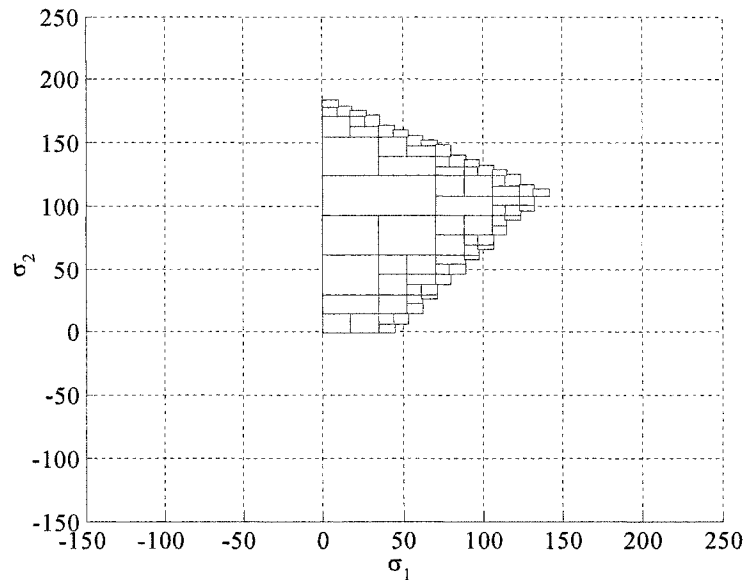


Figure 34 Projection de l'approximation intérieure \underline{S} dans l'espace des paramètres $p = [\sigma_1 \ \sigma_2]$

5.5 Conclusion et interprétation des résultats

Ce chapitre était consacré à l'estimation des paramètres du modèle de LuGre à partir des données réelles récoltées d'un système électropneumatique. Les estimés des paramètres statiques sont obtenus à partir des observations expérimentales. Une plage de variation de ces paramètres a été obtenue suite à divers essais effectués. Malgré l'influence peu importante de ces derniers pour l'estimation des paramètres dynamiques, nous avons pris en compte cette variation pour que l'estimation soit aussi rigoureuse que possible. Les ensembles des estimés des paramètres dynamiques ont été obtenus en deux étapes respectives de préglissement et de glissement.

Dans la première étape (préglissement), nous avons obtenu les estimés incertains du coefficient de rigidité et de la somme du coefficient d'amortissement et du coefficient de frottement visqueux.

Pour connaître toute la plage de variation du coefficient d'amortissement, qui dépend de la vitesse, et celle du frottement visqueux qui est négligeable en préglissement, une seconde étape d'estimation (glissement) a été effectuée.

Par ailleurs, la valeur absolue de l'erreur maximale que nous avons ajoutée aux mesures a été prise suffisamment grande pour tenir compte de toutes les erreurs de mesure et de modélisation. Les résultats obtenus avec cette hypothèse peuvent paraître pessimistes comme le montre le tableau II. Par contre, nous avons la certitude que ces intervalles contiennent l'ensemble des paramètres vérifiant cette hypothèse, puisque l'encadrement n'est pas vide. En effet, si l'hypothèse était fausse, l'algorithme aurait trouvé un ensemble vide comme solution. Cette certitude ne peut être obtenue avec les méthodes d'identification classiques.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans ce mémoire, nous avons effectué l'estimation des paramètres du modèle de frottement de LuGre par des techniques d'identification basées sur l'analyse d'intervalle. L'approche est connue sous le nom d'*estimation à erreur bornée*. Cette approche, présentée dans le chapitre 4, permet de tenir compte des incertitudes sur les paramètres et les données (les mesures), et de retourner la solution sous forme d'un ensemble qui contient tout les estimés des paramètres qui sont compatibles avec les mesures et leur incertitudes. Dans ce mémoire, les ensembles sont approximées par des vecteurs d'intervalles ou des unions de pavés.

Dans le chapitre 2, nous avons donné une description du modèle de frottement de LuGre et avons justifié ce choix parmi d'autres modèles de frottement.

Ensuite, avant d'aborder l'estimation des ces paramètres en trois étapes, décrites au chapitre 5, nous avons introduit dans le chapitre 3 des notions sur le calcul ensembliste et l'arithmétique d'intervalle qui sont nécessaires à la compréhension de l'algorithme SIVIA. L'adaptation de cet algorithme aux modèles régis par des équations différentielles ordinaires (EDO) est présentée au chapitre 4. Nous avons également mentionné l'avantage de l'utilisation de ces algorithmes par rapport aux algorithmes d'identification classiques pour des modèles non linéaires et incertains, mais aussi leurs limitations quand les paramètres des modèles sont sous forme d'EDO. Par exemple, l'explosion combinatoire des intervalles encadrant la solution de l'équation différentielle. Un autre inconvénient des méthodes par analyse d'intervalles est le temps de convergence des algorithmes qui peut devenir très grand lorsque le nombre de paramètres à estimer augmente.

L'approche de l'estimation à erreur bornée nous semble très adapté pour estimer les paramètres du modèle de frottement de LuGre, parce que il s'agit d'un modèle non

linéaire à paramètres incertains et les méthodes classiques ne permettent pas de caractériser l'incertitude de l'estimation sur ce type de modèle de façon efficace. En effet, les méthodes classiques sont généralement basées sur l'hypothèse que le modèle est linéaire par rapport à ces paramètres d'une part, et d'autre part, que les incertitudes sur les sorties mesurées (erreurs) sont décrites par une loi de probabilité connue [24] (gaussien, uniforme...).

Par ailleurs, malgré le caractère garanti de l'estimation obtenue, les résultats pourraient être améliorés en réduisant les intervalles des estimés des paramètres obtenus qui sont possiblement surévalués à cause de la nature du modèle étudié qui est sous forme d'équation différentielle (EDO).

Pour vérifier le bien fondé des résultats obtenus, une étape de validation serait nécessaire. Cette étape consisterait à vérifier qu'un nouvel ensemble de données du banc d'essais utilisé pour calculer les erreurs d'estimation à partir du modèle et des intervalles de paramètres estimés obtenues respectent les gabarits choisis lors de l'estimation. Les intervalles obtenus pourraient alors servir à la conception d'algorithmes de commande robuste du mouvement du système électropneumatique étudié.

ANNEXE 1

PROPRIÉTÉS SUR LES FONCTIONS ENSEMBLISTES

Dans cette annexe, les démonstrations des relations (3.7), (3.8), (3.9) et (3.10) du chapitre 3 sont présentées [36].

Rappelons d'abord les définitions suivantes, à partir desquelles ont découlées les propriétés que nous démontrons.

Soient deux ensembles \mathbb{X} et \mathbb{Y} et une fonction $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$. Alors, l'image directe de \mathbb{X} par la fonction f est définie par :

$$f(\mathbb{X}) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{X}\}$$

L'image réciproque de \mathbb{Y} par f est définie par :

$$f^{-1}(\mathbb{Y}) = \{x \in \mathbb{X} \mid f(x) \in \mathbb{Y}\}$$

Démontrons d'abord la relation suivante :

$$f(\mathbb{X}_1 \cap \mathbb{X}_2) \subset f(\mathbb{X}_1) \cap f(\mathbb{X}_2) \quad (1-1)$$

Pour ce faire, il suffit de prendre un élément de $f(\mathbb{X}_1 \cap \mathbb{X}_2)$ et de montrer qu'il est dans $f(\mathbb{X}_1) \cap f(\mathbb{X}_2)$.

Soit $y \in f(\mathbb{X}_1 \cap \mathbb{X}_2)$, alors il existe un $x \in \mathbb{X}_1 \cap \mathbb{X}_2$ tel que $f(x) = y$. Puisque $x \in \mathbb{X}_1 \cap \mathbb{X}_2$ alors $x \in \mathbb{X}_1$ et $x \in \mathbb{X}_2$, et par définition des fonctions, $f(x) \in f(\mathbb{X}_1)$ et $f(x) \in f(\mathbb{X}_2)$. D'où, $y = f(x) \in f(\mathbb{X}_1) \cap f(\mathbb{X}_2)$.

On doit également vérifier l'égalité suivante :

$$f^{-1}(\mathbb{Y}_1 \cap \mathbb{Y}_2) = f^{-1}(\mathbb{Y}_1) \cap f^{-1}(\mathbb{Y}_2) \quad (1-2)$$

Il suffit de démontrer l'inclusion dans les deux sens pour que l'égalité soit vérifiée. Démontrons d'abord $f^{-1}(\mathbb{Y}_1 \cap \mathbb{Y}_2) \subset f^{-1}(\mathbb{Y}_1) \cap f^{-1}(\mathbb{Y}_2)$. Soit $x \in f^{-1}(\mathbb{Y}_1 \cap \mathbb{Y}_2)$. Alors, par définition des fonctions on a $f(x) \in \mathbb{Y}_1 \cap \mathbb{Y}_2$. On a donc $f(x) \in \mathbb{Y}_1$ et

$f(x) \in \mathbb{Y}_2$. Ce qui implique qu'ils existent $y_1 \in \mathbb{Y}_1$ et $y_2 \in \mathbb{Y}_2$ tels que $f^{-1}(y_1) = x$ et $f^{-1}(y_2) = x$. Donc, $x \in f^{-1}(\mathbb{Y}_1) \cap f^{-1}(\mathbb{Y}_2)$. Par conséquent, $f^{-1}(\mathbb{Y}_1 \cap \mathbb{Y}_2) \subset f^{-1}(\mathbb{Y}_1) \cap f^{-1}(\mathbb{Y}_2)$. Maintenant, on doit vérifier la deuxième inclusion $f^{-1}(\mathbb{Y}_1 \cap \mathbb{Y}_2) \supset f^{-1}(\mathbb{Y}_1) \cap f^{-1}(\mathbb{Y}_2)$. Si $x \in f^{-1}(\mathbb{Y}_1) \cap f^{-1}(\mathbb{Y}_2)$ alors $x \in f^{-1}(\mathbb{Y}_1)$ et $x \in f^{-1}(\mathbb{Y}_2)$. On a alors $f(x) \in \mathbb{Y}_1$ et $f(x) \in \mathbb{Y}_2$ et d'après la définition des fonctions, ceci est vrai si et seulement si $f(x) \in \mathbb{Y}_1 \cap \mathbb{Y}_2$. Ainsi, $x \in f^{-1}(\mathbb{Y}_1 \cap \mathbb{Y}_2)$. La deuxième inclusion $f^{-1}(\mathbb{Y}_1) \cap f^{-1}(\mathbb{Y}_2) \subset f^{-1}(\mathbb{Y}_1 \cap \mathbb{Y}_2)$ est alors vérifiée.

On doit également vérifier l'égalité suivante :

$$f(\mathbb{X}_1 \cup \mathbb{X}_2) = f(\mathbb{X}_1) \cup f(\mathbb{X}_2) \quad (1-3)$$

Comme dans le cas de la relation (a-2), pour vérifier l'égalité, il suffit de vérifier la double inclusion. La première inclusion est $f(\mathbb{X}_1 \cup \mathbb{X}_2) \subset f(\mathbb{X}_1) \cup f(\mathbb{X}_2)$. Soit $y \in f(\mathbb{X}_1 \cup \mathbb{X}_2)$. Alors, il existe un $x \in \mathbb{X}_1 \cup \mathbb{X}_2$ tel que $f(x) = y$. On a donc, soit $x \in \mathbb{X}_1$ alors $f(x) \in f(\mathbb{X}_1)$ ou $x \in \mathbb{X}_2$ alors $f(x) \in f(\mathbb{X}_2)$, ce qui implique que $f(x) \in f(\mathbb{X}_1) \cup f(\mathbb{X}_2)$. D'où $f(\mathbb{X}_1 \cup \mathbb{X}_2) \subset f(\mathbb{X}_1) \cup f(\mathbb{X}_2)$. Vérifions la deuxième inclusion $f(\mathbb{X}_1 \cup \mathbb{X}_2) \supset f(\mathbb{X}_1) \cup f(\mathbb{X}_2)$. Si $y \in f(\mathbb{X}_1 \cup \mathbb{X}_2)$, alors on a, soit $y \in f(\mathbb{X}_1)$ et donc $f^{-1}(y) \in \mathbb{X}_1$ ou $y \in f(\mathbb{X}_2)$ et donc $f^{-1}(y) \in \mathbb{X}_2$. On déduit que $f^{-1}(y) \in \mathbb{X}_1 \cup \mathbb{X}_2$, d'où on a $y \in f(\mathbb{X}_1 \cup \mathbb{X}_2)$. La deuxième inclusion est ainsi vérifiée.

On doit aussi vérifier l'inclusion suivante :

$$f[f^{-1}(\mathbb{Y})] \subseteq \mathbb{Y} \quad (1-4)$$

Soit $y \in f[f^{-1}(\mathbb{Y})]$ et sachant que $f^{-1}(\mathbb{Y}) = \{x \in \mathbb{X} \mid f(x) \in \mathbb{Y}\}$ alors $y \in f(\mathbb{X})$ et comme $f(\mathbb{X}) \subseteq \mathbb{Y}$ donc $y \in \mathbb{Y}$ d'où $f[f^{-1}(\mathbb{Y})] \subseteq \mathbb{Y}$.

De la même façon, on peut vérifier l'inclusion suivante :

$$f^{-1}[f(\mathbb{X})] \supseteq \mathbb{X} \quad (1-5)$$

Si $x \in \mathbb{X}$, il suffit juste de vérifier que $x \in f^{-1}[f(\mathbb{X})]$. En effet, si $x \in \mathbb{X}$ il existe $y \in f(\mathbb{X})$ tel que $f(x) = y$ et on en déduit de la définition de composition de fonctions $f^{-1}(y) \in f^{-1}[f(\mathbb{X})]$. Comme $f^{-1}(y) = x$ alors $x \in f^{-1}[f(\mathbb{X})]$. D'où $\mathbb{X} \subseteq f^{-1}[f(\mathbb{X})]$.

ANNEXE 2

ENCADREMENT DE LA SOLUTION D'UNE ÉDO

Dans cette annexe, on présente la démonstration donnée dans [32] du théorème sur l'encadrement de la solution d'une équation différentielle ordinaire (ODE) décrit au chapitre 4.

Rappelons ici le contenu du théorème: Soit f une fonction continue qui satisfaisant l'unicité de la condition sur $\mathcal{I} \times \mathbb{R}^n \times [\underline{p} \quad \bar{p}]$. Si $\underline{x}(t), \bar{x}(t) \in \mathcal{C}$ satisfont les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \underline{x}(0) &\leq x_0([\underline{p} \quad \bar{p}]) \leq \bar{x}(0) \\ \dot{\underline{x}}_k(t) &\leq f_k(t, \underline{x}_k(t), [\underline{x}_{k-}(t) \quad \bar{x}_{k-}(t)], [\underline{p} \quad \bar{p}]) \\ \dot{\bar{x}}_k(t) &\geq f_k(t, \bar{x}_k(t), [\underline{x}_{k-}(t) \quad \bar{x}_{k-}(t)], [\underline{p} \quad \bar{p}]) \\ \forall t \in \mathcal{I}_o \text{ et } k &= 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

alors $\underline{x}(t)$ et $\bar{x}(t)$ sont respectivement les bornes inférieure et supérieure de l'ensemble de toutes les solutions de l'équation différentielle (4.5) définie plus haut.

Démonstration : [32]

En utilisant les propriétés des opérations sur calcul d'intervalles, les implications suivantes sont vraies $\forall p \in [\underline{p} \quad \bar{p}]$

$$x_0(p) \in x_0([\underline{p} \quad \bar{p}]) \Rightarrow \inf x_0([\underline{p} \quad \bar{p}]) \leq x_0(p) \leq \sup x_0([\underline{p} \quad \bar{p}]) \quad (2-1)$$

Si $\underline{x}(t), \bar{x}(t) \in \mathcal{C}$ satisfaisant les inégalités suivantes :

$$\underline{x}(0) \leq x_0([\underline{p} \quad \bar{p}]) \leq \bar{x}(0) \text{ alors } \underline{x}(0) \leq \inf x_0([\underline{p} \quad \bar{p}]) \leq \sup x_0([\underline{p} \quad \bar{p}]) \leq \bar{x}(0)$$

et en utilisant l'inégalité (b-1) on a :

$$\underline{x}(0) \leq x_0(p) \leq \bar{x}(0) \quad (2-2)$$

$$\forall p \in [\underline{p} \quad \bar{p}]$$

La relation (b-2) est un encadrement de la valeur initiale.

Les relations suivantes sont aussi vraies $\forall p \in [\underline{p} \quad \bar{p}]$, $\forall t \in \mathcal{I}_0$ et $k = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} f_k(t, \underline{x}_k(t), [\underline{x}_{k-}(t) \quad \bar{x}_{k-}(t)], p) \in f_k(t, \underline{x}_k(t), [\underline{x}_{k-}(t) \quad \bar{x}_{k-}(t)], [\underline{p} \quad \bar{p}]) \Rightarrow \\ \inf f_k(t, \underline{x}_k(t), [\underline{x}_{k-}(t) \quad \bar{x}_{k-}(t)], [\underline{p} \quad \bar{p}]) \leq f_k(t, \underline{x}_k(t), [\underline{x}_{k-}(t) \quad \bar{x}_{k-}(t)], p) \end{aligned} \quad (2-3)$$

et

$$\begin{aligned} f_k(t, \bar{x}_k(t), [\underline{x}_{k-}(t) \quad \bar{x}_{k-}(t)], p) \in f_k(t, \bar{x}_k(t), [\underline{x}_{k-}(t) \quad \bar{x}_{k-}(t)], [\underline{p} \quad \bar{p}]) \Rightarrow \\ \sup f_k(t, \bar{x}_k(t), [\underline{x}_{k-}(t) \quad \bar{x}_{k-}(t)], [\underline{p} \quad \bar{p}]) \geq f_k(t, \bar{x}_k(t), [\underline{x}_{k-}(t) \quad \bar{x}_{k-}(t)], p) \end{aligned} \quad (2-4)$$

Si $\underline{x}(t), \bar{x}(t) \in \mathcal{C}$ satisfaisant également les inégalités suivantes :

$$\dot{\underline{x}}_k(t) \leq f_k(t, \underline{x}_k(t), [\underline{x}_{k-}(t) \quad \bar{x}_{k-}(t)], [\underline{p} \quad \bar{p}])$$

$$\dot{\bar{x}}_k(t) \geq f_k(t, \bar{x}_k(t), [\underline{x}_{k-}(t) \quad \bar{x}_{k-}(t)], [\underline{p} \quad \bar{p}])$$

Alors

$$\dot{\underline{x}}_k(t) \leq \inf f_k(t, \underline{x}_k(t), [\underline{x}_{k-}(t) \quad \bar{x}_{k-}(t)], [\underline{p} \quad \bar{p}])$$

et

$$\dot{\bar{x}}_k(t) \geq \sup f_k(t, \bar{x}_k(t), [\underline{x}_{k-}(t) \quad \bar{x}_{k-}(t)], [\underline{p} \quad \bar{p}])$$

$$\forall t \in \mathcal{I}_0 \text{ et } k = 1, 2, \dots, n$$

En se basant sur le théorème et les relations ci-dessus, la solution $x(t)$ de l'équation différentielle suivante (voir chapitre 4) :

$$\dot{x} = f(x(t), u, p)$$

$$y_M = g(x(t), p)$$

$$x(t_0) = x_0$$

est alors encadrée entre la solution inférieure $\underline{x}(t)$ et la solution supérieure $\bar{x}(t)$. C'est à dire $\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \bar{x}(t) \quad \forall p \in [\underline{p} \quad \bar{p}]$.

BIBLIOGRAPHIE

1. Dupont, P., Hayward, V., Armstrong, B., Altpeter, F. (2002). *Single state elastoplastic friction models*. Automatic. Control. IEEE Transactions, **47**(5), 787-792.
2. Canudas de Wit, C., Olsson, H., Aström, K.J., Lischinsky, P. (1995). *A new model for control of systems with friction*. Automatic Control, IEEE Transactions, **40**(3), 419-425.
3. Swevers, J, Al-Bender, F., Ganseman, C. G., Projogo, T. (2000). *An integrated friction model structure with improved presliding behavior for accurate friction compensation*. Automatic. Control. IEEE Transactions, **45**(4), 675-686.
4. Braems, I and al. (2000). Guaranteed estimation of electrochemical parameters by set inversion using interval analysis. Automatica, **495**(1), 1-9.
5. L.Jaulin and al .(2001). Applied interval analysis, with Examples in parameter and state Estimation, Robust Control and Robotics. Springer-verlag, London.
6. Armstrong-Helouvry, B., Dupont, P Canudas de. Wit, C (1994). A survey of Models ,Analysis Tools and Compensation Methods for the Control of Machines with Friction. Automatica, **30**(7), 1083-1138.
7. Marchi, J.A. (1998). Modeling of Dynamic Friction, Impact Backlash and Elastic Compliance Nonlinearities In Machine Tools, With Applications To Asymmetric Viscous And Kinetic Friction Identification, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York. <http://www.perihelia.com>
8. Gravdahl, J.T. (1998). *Friction Problems in Servomechanisms: Modeling and compensation Techniques*, in Department of Engineering Cybernetics., University of Science and Technology., Trondheim, Norway. http://www.itk.ntnu.no/ansatte/Gravdahl_Jan.Tommy/publications.html
9. Gafvert, M. (1996). *Comparison of two Friction Models*, in Department of Automatic Control., Lund institute of technology: Lund , Sweden. www.control.lth.se/publications/msc/msc96.html
10. Lampaert, V., Swevers, J., Al-Bender, F. (2002). *Modification of the Leuven integrated friction model structure*. Automatic Control, IEEE Transaction, **47**(4), 683-687.

11. Canudas, C., Aström, K., Braun, K. (1987). *Adaptive friction compensation in dc-motor drives.*, IEEE Journal of robotics and automation, **3**(6), 681-685.
12. Altpeter, F., Myszkowski, P., Longchamp, R. (1997). *Identification for Control of Drives with Friction.*, IFAC Conference on Control of Industrial Systems, 673-677., Belfort, France
13. Hensen, R.H.A., Van de Molengraft, M.J.G., Steinbuch, M. (2002). *Frequency domain identification of dynamic friction model parameters.*, Control Systems Technology IEEE Transactions, **10**(2), 191-196.
14. Alvarez-Ramirez, J., Garrido-Moctezuma, R.; Rojas, O. (1997). *Compensation of friction via uncertainty estimation in an electrohydraulic drive.*, in Decision and Control. Proceedings of the 36th IEEE Conference., v 2, p 1996-1997., San Diego, California
15. Armstrong, B. (1988). *Friction: experimental determination, modeling and compensation.* In Robotics and Automation, Proceedings of the 1998 IEEE International Conference, v 3, p 1422-1427., Philadelphia, Pennsylvania
16. Al-Duwaish, H.N. (1999). *Parameterization and compensation of friction forces using genetic algorithms.* in 34th IEEE Industry Applications Conference, v 1, p 653-655., Arizona, USA
17. Olsson, H., Aström, K.J., Canudas De Wit, C., Gäfvert, M., Lichinsky, P. (1998). *Friction models and friction compensation.* European Journal of Control, **4**(3). p 176-195.
18. Dahl, P.R. (1977) *Measurement of solid friction parameters of ball bearings.* Proceedings of the 6th Annual Symposium on Incremental Motion, Control systems and devices, p. 49-60. University of Illinois, USA
19. Shirazi, L.R. (2002). *Contribution à la représentation et à l'identification des systèmes avec non linéarités non différentiables*, in EEATS. Thèse de doctorat en automatique-productique. Institut National Polytechnique de Grenoble. Grenoble, France. <http://www.inpg.fr/inpg/index.html>
20. Aström, K.J. (1996). *Control Systems with Friction*, in Department of Automatic and Control. Lund Institute of Technology. Lund, Sweden. <http://theses.lub.lu.se/postgrad/by-organisation/>
21. Johannes, V.I., Green, M.A., Brockley, C.A. (1973). The role of the rate of application of the tangential force in determining the static friction coefficient. Journal Wear, **24**(3), 381-385.

22. Richardson, R. S. H., Nolle, H. (1976). *Surface friction under time-dependent load*. Journal Wear, **37**(1), 87-101.
- 23.. Moore, R.E. (1966). *Interval Analysis*. Englewood Cliffs N. J: Prentice-Hall.
24. Jaulin, L. (1994). Solution globale et garantie de problèmes ensemblistes; Application à l'estimation non linéaire et à la commande robuste. Orsay, France. <http://www.istia.univ-angers.fr/~Jaulin>.
25. Rump, S.M. (1998). *INTLAB-interval laboratory*, in *csendes, T (Ed)*. Development in Reliable Computing. Kluwer academic publisher, 77-104.
26. Landau, I.D., Besançon-Voda, A (2001). *Identification des systèmes*. Paris: Hermes Science Publication.
27. Chapra, S.C., Canale, R.P. (1998). *Numerical methods for engineers with programming and software*, ed. WCB/Mc-Graw-Hill., USA: Tom Casson.
28. Kumon, T., et al (2000). *Nonlinear system identification using genetic algorithm*. in Industrial Electronics Society, 26th Annual Conference of the IEEE, v 4, 2485-2491. Nagoya, Japan
29. Wang, T (2001). Global Optimization for Constrained Nonlinear Programming., University of Illinois, USA. <http://www.cs.uiuc.edu/>
30. Janssen, M., (2001). A constraint Satisfaction Approach for Enclosing solutions to Initial Value Problems for Parametric Ordinary Differential Equations, in Département d'ingénierie informatique, Université catholique de Louvain:, Louvain-la-Neuve, Belgium. <http://www.info.ucl.ac.be>
31. Nedialkov, N.S., Jackson, .K.R., Corliss, G.F. (1997). *Validated Solution of Initial Value Problems For ODE.*, Submitted to SIAM Review. <http://www.cs.toronto.edu/NA/reports.html>
32. Papamichail, I., Claire, A (2002). A rigorous global optimization algorithm for problems with ordinary differential equations. J. global of optimization, **24**(1), 1-33.
33. Khayati, K., Bigras, P., Dessaint, L.A. (2002). *A robust pole clustering design of pneumatic systems using LMI approach*. in Systems, Man and Cybernetics IEEE International Conference, v 4, p 274-279. Hammamet, Tunisia.

34. Madi, M.S., Khayati, K., Bigras, P. (2004). *Parameter estimation for the LuGre Friction Model using Interval Analysis*. Accepted to Systems, Man and Cybernetics, IEEE International Conference. October 10-13 The Hague, Netherlands.
35. Barmish, B.R., *New Tools for Robustness Of linear systems*. (1993), New York: Macmillan Publishing company.
36. Lay, S.R. (1990). *Analysis with an Introduction to Proof*, Englewood Cliffs N. J: Prentice-Hall.